

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ

*СБОРНИК СТАТЕЙ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ
И НАЧАЛАМ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ*



ВЫПУСК

6

ОБЪЕДИНЕННОЕ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО НКТП СССР
1936

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ

СБОРНИК СТАТЕЙ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ
И НАЧАЛАМ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
Р. Н. БОНЧКОВСКОГО

ВЫПУСК ШЕСТОЙ

ОБЪЕДИНЕННОЕ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО НКТП СССР
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ОБЩЕТЕХНИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ И НОМОГРАФИИ
МОСКВА 1936 ЛЕНИНГРАД

АДРЕС РЕДАКЦИИ: Москва, ул. Кирова, Б. Комсомольский 6, Главная редакция общетехнической литературы.

АННОТАЦИЯ

Сборник «Математическое Просвещение» выпуск 6 составлен по образцу предыдущих выпусков и имеет отделы: элементарная математика, высшая математика, методика, задачи и решения задач.

В конце сборника имеется указатель литературы. Сборник рассчитан на учащихся и преподавателей математики всех видов учебных заведений, а также на любителей математики.

Сборники «Математическое Просвещение» продаются во всех магазинах ОНТИ. В случае отсутствия сборников в местных магазинах, сборники можно получить наложенным платежом. Заказы направлять по адресу: Москва, ул. Кирова 6, Книжный магазин ОНТИ № 1, «Книга почтой».

О РЕШЕНИИ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО УРАВНЕНИЯ

$ax + by + cz = d$ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ.

И. А. Бегенев (Воронеж).

В уравнении

$$ax + by + cz = d \quad (1)$$

коэффициенты мы будем предполагать целыми; кроме того пусть $(a, b, c, d) = 1$ ¹⁾ и $a > 0$. Из $(a, b, c, d) = 1$ выводим, что никакая тройка коэффициентов также не имеет общего делителя, ибо в противном случае и четвертый имел бы его делителем, что невозможно благодаря $(a, b, c, d) = 1$.

Разрешая уравнение (1) относительно x , найдем:

$$x = \frac{d - cy}{ay + b}. \quad (2)$$

После тождественных преобразований (2) можно переписать так:

$$x = \frac{ad + bc}{a(ay + b)} - \frac{c}{a}. \quad (3)$$

Обозначая $ad + bc$ через e и предполагая $e \neq 0$ (случай, когда $e = 0$, будет рассмотрен особым образом), после умножения обеих частей равенства (3) на a получим:

$$ax = \frac{e}{ay + b} - c. \quad (4)$$

Введя новое переменное $t = \frac{e}{ay + b}$, выразим x и y в функции t :

$$x = \frac{t - c}{a}, \quad y = \frac{e - bt}{at}. \quad (5)$$

Ясно, что x и y , определенные формулами (5), тождественно удовлетворяют уравнению (1). Это легко также непосредственно проверить, чего мы делать не будем.

Обратимся к функциям, определяемым формулами (5). Из $ax = t - c$ следует, что x может быть целым только в том случае, если ax — целое число (ибо a целое); последнее возможно лишь при целом t . Таким образом для получения целых решений имеет смысл подставлять в (5) вместо t целые числа.

¹⁾ Символы (a_1, a_2, \dots, a_n) в теории чисел обозначают общий наибольший делитель чисел a_1, a_2, \dots, a_n .

Чтобы y было целым, необходимо, чтобы $\frac{e-bt}{at}$ было целым; это возможно лишь, если t — делитель числа e .

Для практического нахождения всех решений уравнения (1) нужно вставить в формулу (5) вместо t делители числа e и отобрать из полученных пар чисел $(x$ и $y)$ те, которые окажутся целыми.

Формулы (5) можно написать в другом виде, если обозначить через t_1 и t_2 делители e , удовлетворяющие условию $t_1 \cdot t_2 = e$. Будем иметь:

$$x = \frac{t_1 - c}{a}, \quad y = \frac{t_2 - b}{a}. \quad (6)$$

Так как наименьший из делителей e равен $-|e|$, а наибольший $|e|$, то согласно (6) для корней уравнения устанавливаются следующие границы:

$$\frac{-|e| - c}{a} \leq x \leq \frac{|e| - c}{a}, \quad \frac{-|e| - b}{a} \leq y \leq \frac{|e| - b}{a}. \quad (7)$$

Рассмотрим теперь вопрос о числе решений уравнения (1), т. е. о числе пар чисел, ему удовлетворяющих. Обозначим это число через R .

Число целых чисел, лежащих на сегменте $\left[\frac{-|e| - c}{a}, \frac{|e| - c}{a}\right]^1$, очевидно, равно $\left[\frac{|e| - c}{a}\right] - \left[\frac{-|e| - c}{a}\right] + 1^2$. Число целых чисел сегмента $\left[\frac{-|e| - b}{a}, \frac{|e| - b}{a}\right]$ равно $\left[\frac{|e| - b}{a}\right] - \left[\frac{-|e| - b}{a}\right] + 1$.

Если r_1 и r_2 — остатки от деления целых чисел a_1 и a_2 ($a_1 > a_2$) на $a > 0$ и k_1, k_2 ($k_1 \geq k_2$) — соответствующие частные, то

$$\left[\frac{a_1}{a} - \frac{a_2}{a}\right] = \left[\frac{ak_1 + r_1}{a} - \frac{ak_2 + r_2}{a}\right] = \left[k_1 - k_2 + \frac{r_1 - r_2}{a}\right].$$

Имеем:

$$\left[\frac{a_1}{a} - \frac{a_2}{a}\right] = \begin{cases} k_1 - k_2, & \text{если } 0 < r_1 - r_2 < a, \\ k_1 - k_2 + 1, & \text{если } a < r_1 - r_2 < 2a, \\ k_1 - k_2 - 1, & \text{если } -a < r_1 - r_2 < 0. \end{cases} \quad (*)$$

Так как $\left[\frac{a_1}{a}\right] = k_1$, $\left[\frac{a_2}{a}\right] = k_2$, то при $a_1 > a_2$ из (*) получим:

$$\left[\frac{a_1}{a}\right] - \left[\frac{a_2}{a}\right] \leq \left[\frac{a_1}{a} - \frac{a_2}{a}\right] + 1.$$

Применяя это неравенство к нашему случаю, получим, что число целых чисел, лежащих в упомянутых выше сегментах, меньше (или равно) числу $\left[\frac{2|e|}{a}\right] + 2$. Так как каждому значению x соответствует из уравнения (1) лишь единственное значение y (и об-

¹⁾ Символом $[a, b]$ в математике обозначают совокупность точек числовой оси, расположенных между точками a и b , включая a и b .

²⁾ Символ $[a]$ в теории чисел обозначает целую часть числа a .

ратно) и корни x и y удовлетворяют (7), то в силу наших рассуждений число решений

$$R \leq \left\lfloor \frac{2|e|}{a} \right\rfloor + 2. \quad (8)$$

Оценку числа R можно произвести иным путем, пользуясь формулой Эйлера для определения числа $\varphi(a)$ положительных делителей данного положительного числа a .

Согласно этой формуле, если $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, где p_i — простые числа, α_i — целые, положительные, то $\varphi(a) = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \dots (1 + \alpha_k)$. Из (6) следует, что R не может превзойти числа делителей e (делители берутся как положительные, так и отрицательные; $-1, +1, -e, +e$ тоже принимаются во внимание). Пусть имеем разложение $|e| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, тогда число делителей e равно $2\varphi(|e|)$ и

$$R \leq 2(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1). \quad (9)$$

Оценку нужно производить обеими формулами (8) и (9); ответом на вопрос о числе решений следует считать ту из этих оценок, которая дает для R меньшую верхнюю границу.

Рассмотрим теперь случай $e = 0$, т. е. $ad + bc = 0$. В этом случае, как легко вывести из (4), уравнение (1) принимает вид:

$$(ay + b)(ax + c) = 0. \quad (10)$$

Если $-\frac{b}{a}$ целое, то, полагая $y = -\frac{b}{a}$ и придавая x любые значения, получим бесчисленное множество решений.

Если же $-\frac{c}{a}$ целое, то при $x = -\frac{c}{a}$ и произвольном целом y получим тоже бесчисленное множество решений.

Эти два случая взаимно исключают друг друга при $a \neq 1$. Действительно, если предположить $-\frac{c}{a}$ и $-\frac{b}{a}$ целыми, то $(a, b, c) = a$, что противоречит условию $(a, b, c, d) = 1$.

Если $-\frac{b}{a}$, $-\frac{c}{a}$ оба дробные, то уравнение не имеет целых решений.

В заключение рассмотрим некоторые интересные частные случаи:

1) $a = 1$, $e \neq 0$. Формулы (6) для вычисления корней принимают вид:

$$x = t_1 - c, \quad y = t_2 - b.$$

Число решений равно в точности числу делителей e , т. е.

$$R = 2(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1),$$

если

$$|e| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}.$$

2) $|e|$ — простое число. Число делителей e четыре: $-1, +1, -e, +e$ и $R \leq 4$.

3) $a = 1$, $|e|$ — простое число. Теперь $R = 4$; решения выражаются через коэффициенты. Согласно формулам для корней получим решения:

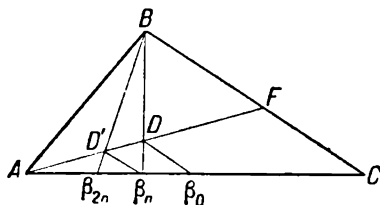
$$\begin{aligned} (1 - c; e - b), & \quad (-1 - c; e - b), \\ (e - c; 1 - b), & \quad (-e - c; -1 - b). \end{aligned}$$

Исследование других частных случаев мы предоставляем читателю.

О ДЕЛЕНИИ СТОРОН ТРЕУГОЛЬНИКА ПРОПОРЦИОНАЛЬНО n -М СТЕПЕНЯМ ПРИЛЕЖАЩИХ СТОРОН.

С. И. Зетель (Москва).

Прямую, делящую сторону треугольника пропорционально n -м степеням прилежащих сторон, будем в дальнейшем называть «прямой n ». В заметке, помещенной мною в «Математическом просвещении» № 1 за 1934 г., был дан способ перехода от «прямых n » к «прямым $n+1$ ». В настоящей заметке я ставлю и разрешаю следующие задачи:



Фиг. 1.

1) Дана «прямая n », построить «прямую $2n$ ».

2) Даны «прямая n » и «прямая m », построить «прямую $m+n$ » и «прямую $m-n$ ».

3) Найти геометрическое место точек, расстояния которых до двух

вершин треугольника пропорциональны n -м степеням двух сторон треугольника.

1. Пусть в треугольнике ABC прямая $B'1n$ — «прямая n », а β_0 — середина стороны AC (фиг. 1). Проведем из точки β_0 прямую β_0D , параллельную BC до пересечения в точке D с прямой $B'2n$. Анггармоническое отношение

$$(AC\beta_n\beta_0) = \frac{A\beta_n}{C\beta_n} : \frac{A\beta_0}{C\beta_0} = \frac{c^n}{a^n}.$$

Из точки β_n проведем прямую, параллельную BC , до пересечения в точке D' с прямой AD . Тогда прямая BD' пересечет AC в точке β_{2n} , т. е. BD' есть «прямая $2n$ ».

$$(AC\beta_{2n}\beta_n) = (AFD'D) = (AC\beta_n\beta_0) = \frac{c^n}{a^n},$$

$$\frac{A\beta_{2n}}{C\beta_{2n}} : \frac{A\beta_n}{C\beta_n} = \frac{A\beta_{2n}}{C\beta_{2n}} : \left(-\frac{c^n}{a^n}\right) = \frac{c^n}{a^n}; \quad \frac{A\beta_{2n}}{C\beta_{2n}} = -\frac{c^{2n}}{a^{2n}}; \quad \frac{A\beta_{2n}}{\beta_{2n}C} = \frac{c^{2n}}{a^{2n}}.$$

Интересен следующий частный случай этой задачи: разделить гипотенузу треугольника пропорционально 4-м степеням катетов

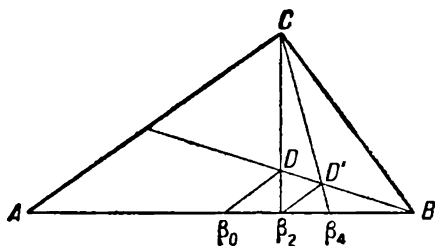
(фиг. 2). $C\beta_2$ — высота треугольника — делит гипотенузу пропорционально квадратам катетов:

$$\frac{A\beta_2}{\beta_2 B} = \frac{b^2}{a^2}.$$

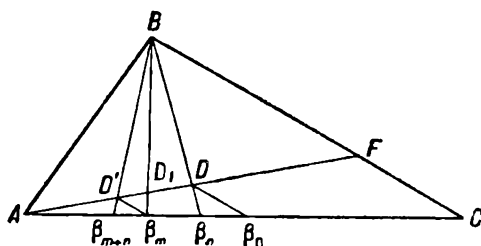
Проведем из β_0 — середины гипотенузы — прямую $\beta_0 D$ параллельно AC . Соединим B с D и из точки β_2 проведем прямую $B_2 D' \parallel \beta_0 D$. CD' пересечет гипотенузу AB в точке β_4 :

$$\frac{A\beta_4}{\beta_4 B} = \frac{b^4}{a^4}.$$

2. Перейдем к решению второй задачи. Пусть в треугольнике ABC прямая $B\beta_n$ — «прямая n », а прямая $B\beta_m$ — «прямая m ». β_0 — середина стороны AC . Построить «прямую $m+n$ » — $B\beta_{m+n}$ (фиг. 3).



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Проведем из β_0 прямую $\beta_0 D$ параллельно BC до пересечения в точке D с прямой $B\beta_n$. Из точки β_m проведем прямую $\beta_m D'$ параллельно $\beta_0 D$ до пересечения в точке D' с прямой AD . Прямая BD' пересечет сторону AC в точке β_{m+n} — в искомой точке.

Действительно, по условию

$$(AC\beta_n\beta_0) = \frac{c^n}{a^n}, \quad (AC\beta_m\beta_0) = \frac{c^m}{a^m},$$

$$(AFD'D) = (AC\beta_m\beta_0) = \frac{c^m}{a^m}, \quad (AFD'D) = (AC\beta_{m+n}\beta_n) = \frac{c^m}{a^m},$$

$$\frac{A\beta_{m+n}}{C\beta_{m+n}} \cdot \frac{A\beta_n}{C\beta_n} = \frac{c^m}{a^m},$$

$$\frac{A\beta_{m+n}}{\beta_{m+n}C} = \frac{c^{m+n}}{a^{m+n}}.$$

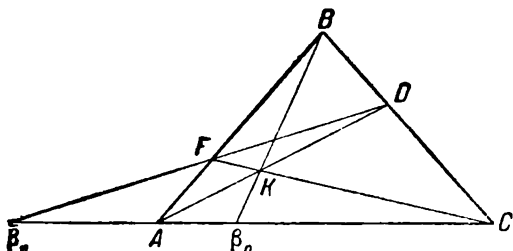
Если из точки D_1 , в которой прямая $B\beta_m$ пересекает AF , провести прямую $D_1\beta_{m-n}$ параллельно BC , то $B\beta_{m-n}$ — «прямая $m-n$ ». Доказательство очевидно.

3. До сих пор мы строили прямые, делящие сторону треугольника внутренним образом пропорционально n -м степеням прилежащих сторон; теперь построим прямую, делящую сторону треугольника внешним образом пропорционально n -м степеням прилежащих сторон.

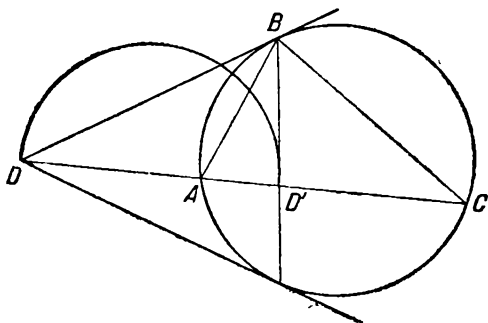
Проведем из A (фиг. 4) произвольную прямую AD , пересекающую $B\beta_n$ в точке K , и прямую CK , пересекающую AB в точке F . Прямая DF пересечет AC в точке β_n , делящей AC так, что

$$\frac{A\beta_n}{C\beta_n} = \frac{c^n}{a^n}.$$

Окружность, построенная на $\beta_n\beta_n$ как на диаметре, есть геометрическое место точек, отношение расстояния которых до вершин A и C равно отношению n -х степеней прилежащих сторон.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Окружность, имеющая диаметром отрезок между основаниями биссектрис внутреннего и внешнего углов, выходящих из одной вершины треугольника, есть окружность Аполлония. Мы назовем ее первой окружностью Аполлония.

Окружность, имеющую диаметром отрезок, соединяющий основания прямых, делящих сторону треугольника внутренним и внешним образом пропорционально вторым степеням сторон, назовем второй окружностью Аполлония.

Построение второй окружности Аполлония производится просто на основании одного свойства касательной к окружности, описанной около треугольника.

Пусть ABC — данный треугольник (фиг. 5). Опишем около него окружность и проведем касательную к ней в вершине B до пересечения в точке D со стороной AC .

Тогда $\frac{DA}{DC} = \frac{c^2}{a^2}$. В самом деле: из подобия треугольников DAB и DBC имеем:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DB}{DC}; \quad \frac{AB^2}{BC^2} = \frac{DA \cdot DC}{DC^2} = \frac{DA}{DC}; \quad \frac{DA}{DC} = \frac{c^2}{a^2}.$$

Итак, касательная к окружности, описанной около треугольника в его вершине, делит противоположную сторону внешним образом в отношении квадратов двух других сторон. Построив прямую BD' , делящую отрезок AC внутренним образом пропорционально квадратам прилежащих сторон, определим DD' — диаметр второй окружности Аполлония (прямая BD' — поляра точки D).

4. « n -я окружность Аполлония» пересекает сторону $BC = a$ ($a < c$) в точке N так, что $\frac{NA}{NC} = \frac{c^n}{a^n}$. Соединим точку N с A . Если в треугольнике ANC провести прямую, исходящую из вершины N и делящую сторону AC в отношении m -х степеней прилежащих сторон, то эта прямая разделит AC в отношении mn -х степеней сторон данного треугольника.

Обратим внимание на одно интересное свойство « n -х окружностей» Аполлония. Докажем, что центр « n -й окружности Аполлония» есть основание прямой, делящей сторону треугольника внешним образом пропорционально — $2n$ -м степеням прилежащих сторон. Действительно, $CD = \frac{ba^n}{c^n - a^n}$ в предположении, что D делит AC внешним образом пропорционально n -м степеням прилежащих сторон.

$$DD' = \frac{ba^n}{c^n - a^n} + \frac{ba^n}{c^n + a^n} = \frac{2ba^nc^n}{c^{2n} - a^{2n}}.$$

Так как M — середина DD_1 , то

$$DM = \frac{ba^nc^n}{c^{2n} - a^{2n}},$$

$$CM = \frac{ba^nc^n}{c^{2n} - a^{2n}} - \frac{ba^n}{c^n + a^n} = \frac{ba^{2n}}{c^{2n} - a^{2n}}.$$

Итак, теорема доказана.

Интересен частный случай. Центр первой окружности Аполлония — основание прямой, делящей внешним образом сторону треугольника пропорционально квадратам прилежащих сторон. Следовательно, центр первой окружности Аполлония — основание прямой, делящей внешним образом сторону треугольника пропорционально квадратам прилежащих сторон. Следовательно, центр первой окружности Аполлония есть точка пересечения касательной, проведенной в вершине треугольника, с противоположной стороной. Окружность, описанная около треугольника, и первая окружность Аполлония ортогональны.

ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА О МНОГОГРАННИКАХ.

Р. Н. Бончковский (Москва).

Пусть E — число вершин, K — число ребер и F — число граней выпуклого многогранника. Теорема Эйлера состоит, как известно, в утверждении, что

$$E - K + F = 2.$$

Эта теорема рассматривалась многими авторами, в том числе Эйлером, Коши, Брюкнером, Штейнером, Лежандром, Жорданом, Мебиусом, Штаудтом и др. Подробный обзор всех доказательств теоремы можно найти в статье В. Комаревского «Теорема *Euler'a* о многогранниках» (Труды Туркестанского научного общества при Среднеазиатском университете, т. II, Ташкент 1925). Мы хотим

предложить здесь одно новое доказательство этой теоремы, которое на наш взгляд обладает большой наглядностью.

Пусть α — плоскость, проведенная таким образом, что никакие две вершины многогранника не лежат на прямой, параллельной плоскости α . Проведем через каждую вершину многогранника плоскость, параллельную плоскости α . В силу сделанного предположения о направлении плоскости α каждая из этих плоскостей проходит через одну и только через одну вершину многогранника; поэтому общее число этих плоскостей равно E . Каждая из проведенных параллельных плоскостей, за исключением двух крайних, пересекает многогранник по выпуклому многоугольнику; каждая из двух крайних плоскостей имеет с многогранником лишь одну общую точку, именно ту вершину, через которую она проходит. Если на поверхности многогранника провести линии пересечения его граней с проведенными параллельными плоскостями, то его поверхность разобьется на треугольники и трапеции; это разбиение поверхности многогранника мы будем называть сетью; стороны и вершины треугольников и трапеций сети будем называть ребрами и вершинами сети.

Если обозначить общее число вершин сети через E' , а общее число ребер сети, лежащих в проведенных параллельных плоскостях, через K'_1 , то между этими двумя числами существует соотношение:

$$E' - K'_1 = 2. \quad (1)$$

В самом деле, K'_1 ребер и $E' - 2$ вершины сети образуют $E - 2$ многоугольника в проведенных нами параллельных плоскостях; числа вершин и сторон каждого многоугольника равны между собою, откуда следует, что

$$E' - 2 = K'_1,$$

а это равносильно соотношению (1).

Рассмотрим теперь все те треугольники и трапеции сети, которые лежат между двумя соседними параллельными плоскостями. Они образуют замкнутую цепь треугольников и трапеций, обладающих следующими свойствами: а) к каждому многоугольнику цепи примыкает два других многоугольника по двум его боковым сторонам; б) каждая боковая сторона какого-либо многоугольника цепи служит в то же время боковой стороной еще одного и только одного многоугольника цепи. Эти свойства показывают, что число многоугольников в каждой цепи равно числу боковых сторон этих многоугольников, а значит, и общее число всех многоугольников сети равно общему числу всех их боковых сторон. Если обозначим первое число через F' , а второе через K'_2 , то получаем:

$$F' - K'_2 = 0. \quad (2)$$

Заметим, что K'_2 есть не что иное, как число частей, на которые разбиты ребра многогранника плоскостями, параллельными плоскости α ; поэтому среди этих K'_2 ребер нет ни одного ребра, вошедшего

во введенное ранее число K'_1 ребер, и обратно, причем K'_1 и K'_2 вместе исчерпывают все ребра сети.

Складывая (1) и (2) почленно, получаем:

$$E' - (K'_1 + K'_2) + F' = 2. \quad (3)$$

Заметим теперь, что вершины сети, не являющиеся в то же время вершинами многогранника, могли появиться лишь от пересечения ребер параллельными плоскостями, проведенными через вершины многогранника. Общее число вершин сети E' , число вершин многогранника E , значит, число этих точек пересечения есть $E' - E$. Легко обнаружить, что это число в точности равно разности $K'_2 - K$. В самом деле, число частей, на которое разбито каждое ребро параллельными плоскостями, на единицу превышает число точек пересечения этого ребра с этими плоскостями. Значит, общее число K'_2 частей, на которые оказались разбитыми ребра многогранника, на K превышает общее число точек деления, т. е. число $E' - E$. Итак,

$$K'_2 - K = E' - E,$$

или

$$E - K = E' - K'_2.$$

Проведенные нами параллельные плоскости пересекают каждую грань многогранника по параллельным прямым; число частей, на которые разбивается каждая грань, на единицу превышает число линий пересечения этой грани с параллельными плоскостями. Значит, общее число всех частей граней, т. е. число F' всех многоугольников сети, на F превышает общее число всех указанных линий пересечения, т. е. число K'_1 . Итак, имеем:

$$F' - F = K'_1,$$

или

$$F = F' - K'_1.$$

Складывая почленно равенства (4) и (5), получаем:

$$E - K + F = E' - (K'_1 + K'_2) + F'.$$

Сравнивая это равенство с (3), получаем окончательно:

$$E - K + F = 2.$$

Теорема Эйлера доказана.

На различных обобщениях теоремы Эйлера мы не имеем возможности здесь останавливаться.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ МНОГОУГОЛЬНИКОВ ПО СПОСОБУ САРРОНА.

Л. С. Х р е н о в (Воронеж).

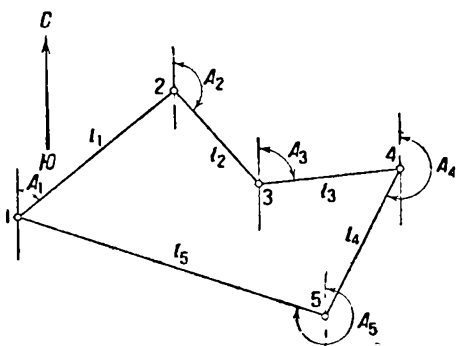
Для вычисления площади многоугольника существуют три метода:
1) аналитический — по координатам вершин или их приращениям,

2) механический — путем применения планиметра или палетки, и, наконец,

3) геометрический — путем разбиения фигуры на части, площадь каждой из которых можно легко определить.

При определении геометрическим способом площади многоугольника (фиг. 1), представляющего собой план участка земли, раз-

бивают его на треугольники и площадь каждого из них определяют по основанию и высоте. Но при составлении плана эти основания и высоты на местности не измеряются, а потому для их определения пользуются планом участка и измеряют их на плане. Точность измерения, конечно, не превышает наименьшее деление масштаба. Так, например, для масштаба $\frac{1}{50000}$ эти линии могут быть определены по плану с погрешностью в 10 м.



Фиг. 1.

Указанные обстоятельства заставляют искать способ определения площадей земельных участков по тем данным, которые дают измерения на местности, обычно производимые для составления плана участка, без дополнительных измерений на местности и на плане. Этим требованиям удовлетворяет способ, предложенный французским ученым Сарроном (Sarron). Его способ обладает еще и тем преимуществом, что он не требует предварительного составления плана.

При составлении плана обычно измеряют (или вычисляют): 1) длины всех сторон многоугольника l_1, l_2, \dots, l_n , 2) внутренние углы и 3) углы A_1, A_2, \dots, A_n , образуемые сторонами многоугольника с меридианом, или только эти последние углы и длины сторон (фиг. 1); в формулу Саррона входят только эти величины.

Мы приводим вывод формулы Саррона для вычисления площади многоугольника несколько упрощенным способом. Притом мы ограничимся выводом формулы для шестиугольника (фиг. 2), а затем распространим его на n -угольники.

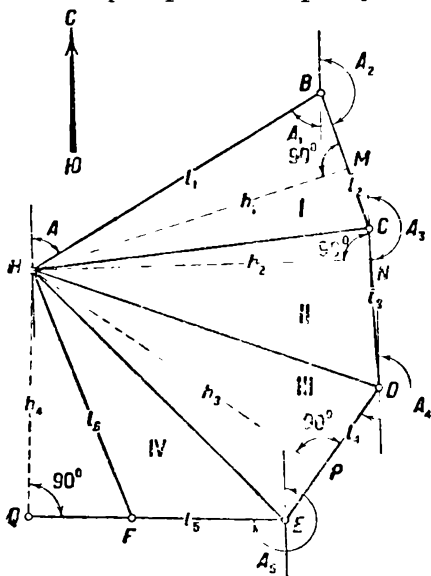
Обозначая площадь многоугольника $HBCDEF$ через P , из чертежа (фиг. 2) имеем:

$$2P = l_2 h_1 + l_3 h_2 + l_4 h_3 + l_5 h_4. \quad (1)$$

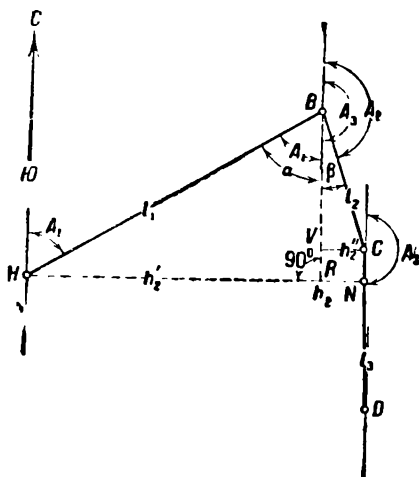
Так как стороны $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6$ и углы A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 известны в результате измерений на местности, неизвестными остаются только h_1, h_2, h_3, h_4 .

Из прямоугольного треугольника HBM имеем:

$$h_1 = l_1 \sin B = l_1 \sin [180^\circ - (A_2 - A_1)] = l_1 \sin (A_2 - A_1). \quad (2)$$



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Для определения h_2 часть $HBCN$ представим отдельно (фиг. 3) и проведем линии $BR \parallel CN$ и $CV \parallel HN$; тогда h_2 можно рассматривать как проекцию ломаной $HBCN$ на прямую HN :

$$h_2 = \text{пр. } HB + \text{пр. } BC + \text{пр. } CN.$$

Но

$$\text{пр. } HB = h'_2, \text{ пр. } BC = h''_2, \text{ пр. } CN = 0,$$

поэтому

$$h_2 = h'_2 + h''_2.$$

Из треугольников HBR и BVC имеем:

$$h'_2 = l_1 \sin \alpha = l_1 \sin [180^\circ - (A_3 - A_1)] = l_1 \sin (A_3 - A_1),$$

$$h''_2 = l_2 \sin \beta = l_2 \sin (A_3 - A_2).$$

Складывая значения h'_2 и h''_2 , получим:

$$h_2 = l_1 \sin (A_3 - A_1) + l_2 \sin (A_3 - A_2). \quad (3)$$

Для определения величины h_3 представим часть многоугольника $HBCDP$ отдельно (фиг. 4). Тогда h_3 можно рассматривать как проекцию ломаной $HBCDP$ на HP . Тогда

$$HP = \text{пр. } HB + \text{пр. } BC + \text{пр. } CD + \text{пр. } DP.$$

Если проведем линии $BX \parallel DP$, $CY \parallel DP$, $DZ \parallel HP$, $CW \parallel HP$, то увидим, что пр. $AB = h'_3$, пр. $BC = h''_3$, пр. $CD = h'''_3$, пр. $DP = 0$ или

$$h_3 = h'_3 + h''_3 + h'''_3.$$

Из треугольников HBX , BCW , CDZ имеем:

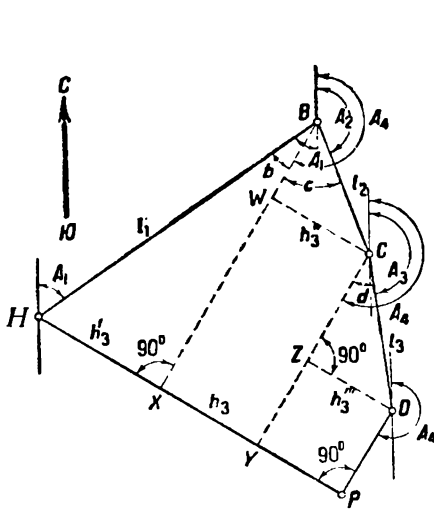
$$h'_3 = l_1 \sin b = l_1 \sin [180^\circ - (A_4 - A_1)] = l_1 \sin (A_4 - A_1),$$

$$h''_3 = l_2 \sin c = l_2 \sin (A_4 - A_2),$$

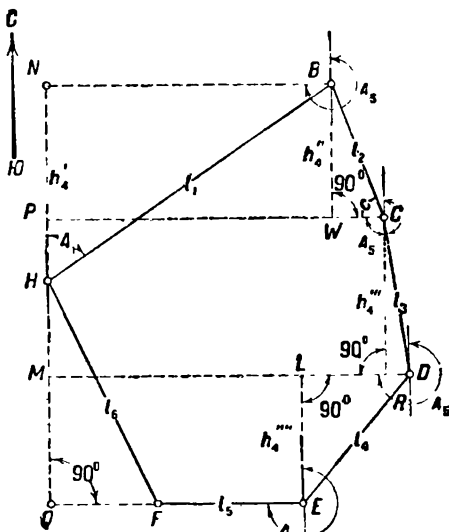
$$h'''_3 = l_3 \sin d = l_3 \sin (A_4 - A_3).$$

Складывая значения h'_3 , h''_3 , h'''_3 , получим:

$$h_3 = l_1 \sin (A_4 - A_1) + l_2 \sin (A_4 - A_2) + l_3 \sin (A_4 - A_3). \quad (4)$$



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Для определения неизвестной величины h_4 рассмотрим фиг. 5. Именно, высота есть проекция ломаной $HBCDEQ$ на ось HQ . Поэтому

$$h_4 = HQ = \text{пр. } HB + \text{пр. } BC + \text{пр. } CD + \text{пр. } DE + \text{пр. } EQ.$$

Далее выполним следующие построения: 1) продолжим линию QH до пересечения с линией $BN \parallel EQ$, 2) проведем линии $CP \parallel EQ$ и $DM \parallel EQ$ и 3) проведем линии $BW \parallel HQ$, $CR \parallel HQ$ и $EL \parallel HQ$.

Тогда из треугольников HBN , BCW , CDR и DEL имеем:

$$\text{пр. } HB = HN = h'_4 = l_1 \sin (A_5 - A_1),$$

$$\text{пр. } BC = BW = h''_4 = l_2 \sin C = l_2 \sin [180^\circ - (A_5 - A_2)] = l_2 \sin (A_5 - A_2),$$

$$\text{пр. } CD = CR = h'''_4 = l_3 \sin D = l_3 \sin (A_5 - A_3),$$

$$\text{пр. } DE = LE = h''''_4 = l_4 \sin R = l_4 \sin (A_5 - A_4).$$

Наконец,

$$\text{пр. } EQ = 0,$$

так как $EQ \perp QH$.

Складывая h'_1 , h'_2 , h'_3 и h'_4 , получим:

$$h_4 = l_1 \sin(A_5 - A_1) + l_2 \sin(A_5 - A_2) + l_3 \sin(A_5 - A_3) + l_4 \sin(A_5 - A_4) \quad (5)$$

Подставляя в формулу (1) вместо h_1 , h_2 , h_3 , h_4 их значения из формул (2), (3), (4) и (5), получим:

$$\begin{aligned} 2P = & l_2 l_1 \sin(A_2 - A_1) + l_3 [l_1 \sin(A_3 - A_1) + l_2 \sin(A_3 - A_2)] + \\ & + l_4 [l_1 \sin(A_4 - A_1) + l_2 \sin(A_4 - A_2) + l_3 \sin(A_4 - A_3)] + \\ & + l_5 [l_1 \sin(A_5 - A_1) + l_2 \sin(A_5 - A_2) + l_3 \sin(A_5 - A_3) + \\ & + l_4 \sin(A_5 - A_4)], \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} 2P = & l_2 l_1 \sin(A_2 - A_1) + l_3 l_1 \sin(A_3 - A_1) + l_3 l_2 \sin(A_3 - A_2) + \\ & + l_4 l_1 \sin(A_4 - A_1) + l_4 l_2 \sin(A_4 - A_2) + l_4 l_3 \sin(A_4 - A_3) + \\ & + l_5 l_1 \sin(A_5 - A_1) + l_5 l_2 \sin(A_5 - A_2) + l_5 l_3 \sin(A_5 - A_3) + \\ & + l_5 l_4 \sin(A_5 - A_4). \end{aligned}$$

Совершенно так же можно вывести формулу для двойной площади n -угольника, а именно:

$$\begin{aligned} 2P = & l_2 l_1 \sin(A_2 - A_1) + l_3 l_1 \sin(A_3 - A_1) + l_3 l_2 \sin(A_3 - A_2) + \\ & + l_4 l_1 \sin(A_4 - A_1) + \dots + l_4 l_3 \sin(A_4 - A_3) + \dots \\ & \dots + l_{n-1} l_1 \sin(A_{n-1} - A_1) + l_{n-1} l_2 \sin(A_{n-1} - A_2) + \dots \\ & \dots + l_{n-1} l_{n-2} \sin(A_{n-1} - A_{n-2}). \end{aligned} \quad (6)$$

Это и есть формула Саррона.

Для вычисления площади многоугольников по формуле (6) удобно применять следующую схему:

№№ вер- шин много- угольника	Длина сторон	Произве- дение двух сторон	Разность азимутов двух сторон	Натураль- ное значе- ние синуса	Произве- дение
------------------------------------	-----------------	----------------------------------	--	---------------------------------------	-------------------

причем синусы углов находятся из таблиц натуральных значений тригонометрических функций, и вычисления производятся на арифмометре. Суммируя произведения последнего столбца, получим двойную площадь многоугольника.

ЧТО ИЗВЕСТНО В НАСТОЯЩЕЕ ВРЕМЯ О ПРОСТЫХ ЧИСЛАХ?

(Очерк.)

Н. Г. Ч у д а к о в (Саратов).

Всякому известно из арифметики, что целые числа разделяются на простые и составные (сложные). Простым числом называется число, не имеющее других делителей, кроме единицы и самого себя (например 13). Составным числом называется число, имеющее самое меньшее трех делителей (например 20)¹⁾.

Еще в глубокой древности установлены эти различия между числами и дан очень простой способ построения таблицы простых чисел (решето Эратосфена). Уже тогда интересовали математиков внутренние законы этой таблицы. Но решение этих вопросов, несмотря на их кажущуюся простоту, было недоступно силам математики древних. Только современной математике удалось решить некоторые (далеко не все!) из старых задач.

В настоящее время проблема распределения простых чисел изучается почти исключительно методами математического анализа, т. е. самыми тонкими и остроумными из известных нам методов. Статья является кратким очерком достигнутых результатов в этой области, а также указывает на некоторые интересные проблемы, решение которых можно ожидать в ближайшем будущем.

Мы не можем, конечно, претендовать на полноту очерка, а также не можем изложить основные доказательства, ибо они очень громоздки и основаны на весьма тонких соображениях, заимствованных из труднейших разделов современной математики.

В статье даются, однако, элементарные решения некоторых задач теории простых чисел.

1. О числе простых чисел.

1. Естественный вопрос, который возникает при изучении простых чисел, такой: сколько простых чисел находится между 1 и заданным числом n ?

Еще Эвклид доказал, что это число неограниченно возрастает вместе с n , т. е. что простых чисел бесконечно много. Эту теорему мы сейчас докажем.

Теорема. Простых чисел бесконечно много.

Докажем эту теорему от противного. Допустим, что существует конечное число простых чисел. Пусть таковыми являются числа:

$$p_1, p_2, \dots, p_n.$$

Составим число

$$N = p_1 p_2 \dots p_n + 1.$$

¹⁾ Особые соображения, о которых здесь нет возможности говорить, заставляют число 1 не причислять ни к простым, ни к составным числам.

Как известно из арифметики, каждое число имеет хотя бы один простой делитель (всякое число даже разлагается на простые множители). Значит, число должно делиться на некоторое число p_i , находящееся среди чисел p_1, p_2, \dots, p_n . А это невозможно, ибо число N при делении на p_i дает, очевидно, в остатке 1. Мы приходим к противоречию; значит, число простых чисел не может быть ограниченным.

Только что доказанная теорема не дает, однако, количественной оценки для числа простых чисел. Поэтому издавна стали интересоваться вопросом об изыскании точной формулы для числа простых чисел между 1 и n . Теперь уже доказано, что такой формулы не существует: ее нельзя написать при помощи известных в алгебре и анализе символов операций. Эту формулу, иными словами, нельзя выразить аналитически. Когда последнее обстоятельство выяснилось, стали пытаться отыскивать асимптотическое выражение для указанной величины, т. е. выражения хотя бы и не точные, но ошибки которых делаются достаточно малыми для больших значений n . Именно выяснилось, что если через $\pi(n)$ обозначить число простых чисел, заключенных между 1 и n , то $\pi(n)$ выразится следующим приближенным равенством:

$$\pi(n) \approx \frac{n}{\ln n}$$

(где $\ln n$ — натуральный логарифм числа n), или иначе:

$$\pi(n) = \frac{n}{\ln n} + \eta \frac{n}{\ln n}, \quad (1)$$

где η — бесконечно малая величина.

Это замечательная теорема была доказана почти одновременно и независимо друг от друга бельгийским математиком Валле-Пуссеном (Vallée-Poussin) и французским математиком Адамаром (Adamard) в 1896 г. Впрочем, существование этого факта подозревал еще русский академик П. С. Чебышев. Доказательство этой теоремы, к сожалению, нельзя здесь привести: оно основано на весьма тонких соображениях теории функций. Наиболее простое доказательство этой теоремы дал немецкий математик Ландау (E. Landau) в 1932 г.¹⁾

2. Среди других подобного рода вопросов интересен вопрос о подсчете числа простых чисел в арифметической прогрессии, первый член и разность которой взаимно просты (т. е. не имеют общих делителей).

Заметим прежде всего, что если первый член и разность имеют общий делитель, то, очевидно, арифметическая прогрессия не имеет ни одного простого числа среди своих членов.

Итак, пусть в прогрессии:

$$a, a + d, a + 2d, \dots, a + nd, \dots \quad (2)$$

¹⁾ Sitzungsberichte der Preussische Akademie der Wissenschaften, т. XXXII—XXXIII, 1932.

(где a — первый член, d — разность) a и d взаимно просты. Спрашивается, будет ли прогрессия (2) содержать конечное или бесконечное число простых чисел?

В очень частных случаях эту задачу можно решить элементарно. Докажем, например, что прогрессия:

$$5, 11, 17, 23, 29, \dots \quad (3)$$

(первый член равен 5, разность 6) содержит бесконечно много простых чисел.

Прежде всего очевидно, что все члены прогрессии* (3) имеют вид $6n + 1$.

Докажем теперь необходимую в дальнейшем лемму.

Лемма. Если перемножить между собой числа вида $6n + 1$, то произведение будет также числом вида $6n + 1$.

Доказательство. Для двух множителей это положение почти очевидно:

$$(6n_1 + 1)(6n_2 + 1) = 6(6n_1n_2 + n_1 + n_2) + 1.$$

Допустим теперь, что лемма верна для k сомножителей; докажем, что она будет верна и для $k + 1$ сомножителя. В самом деле, по предположению имеем:

$$(6n_1 + 1)(6n_2 + 1) \dots (6n_k + 1) = 6n + 1. \quad (4)$$

Умножим теперь $6n + 1$ на $6n_{k+1} + 1$. По доказанному ранее опять получаем числа вида $6n + 1$. Итак, лемма доказана.

Теорема. Прогрессия

$$5, 11, 17, 23, 29 \dots \quad (3)$$

содержит бесконечное множество простых чисел.

Доказательство. Доказательство ведем от противного. Допустим, что (3) содержит конечное число простых чисел. Пусть P — последнее простое число, принадлежащее к (3). Составим число:

$$N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots P - 1 \quad (5)$$

(уменьшаемое в правой части содержит все простые числа от 2 до P).

Очевидно, что N принадлежит к прогрессии (3) и, значит, не может разлагаться на множителей исключительно вида $6n + 1$ (в силу доказанной выше леммы). Следовательно, N имеет простой делитель вида $6n + 1$ ¹⁾, т. е. N делится на простое число, принадлежащее прогрессии (3). Согласно же нашему предположению этот простой делитель должен быть меньше или равен P .

С другой стороны, N не может делиться на простые числа прогрессии (3), так как оно на единицу меньше числа, делящегося на все такие простые числа. Итак, мы пришли к противоречию. Следовательно, теорема доказана.

¹⁾ Очевидно, что всякое простое число имеет или вид $6n + 1$ или вид $6n - 1$.

Итак, в частном случае теорема доказана. Но доказательство аналогичной теоремы для самого общего случая не удается провести до сего времени элементарными средствами. Аналитически же эта теорема была доказана еще в 1837 г. немецким математиком Дирихле (Dirichlet). Оказалось, что прогрессия (2) всегда содержит бесконечно много простых чисел.

Если теперь поставить и здесь вопрос о более точной количественной оценке числа простых чисел, то ответ будет почти одинаков с тем, какой нам уже известен: точной формулы дать нельзя, но существует зато асимптотическая формула для интересующей нас величины. Именно, число простых чисел, которые принадлежат к прогрессии (2), асимптотически равно:

$$\frac{n}{\varphi(d) \cdot \ln n}$$

(здесь $\varphi(d)$ — число чисел взаимно простых с d и меньших d , а $\ln n$ — натуральный логарифм n).

Например, в прогрессии (3) имеется около

$$\frac{1000000}{2 \ln 1000000} \approx 36191$$

простых чисел, принадлежащих первому миллиону.

Доказательство вышеуказанной теоремы дано Валле-Пуссенном и Адамаром одновременно с соотношением $\pi(n) \approx \frac{n}{\ln n}$ ¹⁾.

II. О промежутках между простыми числами.

Другой интересный вопрос, который возникает при просмотре таблицы простых чисел, таков: какой величины промежутки между соседними простыми числами?

Прежде всего легко доказать, что эти промежутки могут быть как угодно велики. В самом деле, рассмотрим ряд чисел:

$$n! + 2; \quad n! + 3; \quad \dots; \quad n! + n \quad (6)$$

(где n — целое число, большее или равное 2).

Ряд (6) содержит $n - 1$ членов. Все эти числа, очевидно, — составные числа (например, число $n! + n$ можно записать так: $n! + n = n[(n-1)! + 1]$). Следовательно, промежуток между соседними простыми числами может быть как угодно велик [для ряда (6) он больше или равен $n - 1$, где n — произвольное целое число].

Сказанное показывает, что нельзя указать верхнего предела для рассматриваемого промежутка. Однако можно спросить себя: как велик промежуток между n -м и $(n+1)$ -м простыми числами в сравнении с самим n -м простым числом?

¹⁾ Легко видеть, что рассмотренная задача для арифметической прогрессии есть не что иное, как обобщение задачи о числе всех простых чисел в промежутке от 1 до n , ибо натуральный ряд чисел есть тоже арифметическая прогрессия, первый член и разность которой равны единице.

Точного ответа на этот вопрос, повидимому, дать нельзя, но есть основания думать, что этот промежуток сравнительно мал. Именно, если через p_n обозначить n -е простое число, а через δ_n — n -й промежуток ($\delta_n = p_{n+1} - p_n$), то в настоящее время имеется гипотеза, что

$$\delta_n < C \ln p_n$$

(где C — абсолютная постоянная, не зависящая от n).

Что же достоверно известно о величине δ_n ? Прежде всего теорема Валле-Пуссена позволяет доказать следующее:

Теорема. $\frac{\delta_n}{p_n} \rightarrow 0$, если $n \rightarrow \infty$ [символически: $\delta_n = 0(p_n)$].

Доказательство. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Найдем число простых чисел между p_n и $p_n + \varepsilon p_n$. Оно равно:

$$\pi(p_n + \varepsilon p_n) - \pi(p_n) = \frac{p_n + \varepsilon p_n}{\ln(p_n + \varepsilon p_n)} - \frac{p_n}{\ln p_n} + \eta' \frac{p_n + \varepsilon p_n}{\ln(p_n + \varepsilon p_n)} - \eta \frac{p_n}{\ln p_n}$$

[в силу равенства (1)]. Отсюда следует:

$$\pi(p_n + \varepsilon p_n) - \pi(p_n) = \frac{p_n}{\ln p_n} \cdot \left(\frac{1 + \varepsilon}{1 + \frac{\ln(1 + \varepsilon)}{\ln p_n}} - 1 + \eta' \frac{1 + \varepsilon}{1 + \frac{\ln(1 + \varepsilon)}{\ln p_n}} - \eta \right).$$

Если $n \rightarrow \infty$, то $p_n \rightarrow \infty$; $\ln p_n \rightarrow \infty$; $\frac{p_n}{\ln p_n} \rightarrow \infty$; $\eta' \rightarrow 0$; $\eta \rightarrow 0$; значит:

$$\pi(p_n + \varepsilon p_n) - \pi(p_n) \rightarrow \infty,$$

т. е. существует бесконечное множество простых чисел между p_n и $p_n + \varepsilon p_n$ при $p_n \rightarrow \infty$.

Следовательно, при достаточно большом p_n , $p_{n+1} < p_n + \varepsilon p_n$, т. е. $\delta_n < \varepsilon p_n$.

Итак,

$$\frac{\delta_n}{p_n} < \varepsilon.$$

Так как ε может быть взято произвольно малым, то

$$\frac{\delta_n}{p_n} \rightarrow 0^1).$$

Более глубокие исследования немецких математиков Гогейзеля (Hoheisel) и Гейльбронна (Heilbronn) в 1930—1932 гг. показали, что

$$\delta_n < C p_n^{\frac{242}{250}}.$$

¹⁾ Отсюда получается интересное следствие: пусть дана любая возрастающая геометрическая прогрессия

$$a, aq, aq^2, \dots, aq^n, \dots \quad (q > 1).$$

Тогда, начиная с некоторого n , все промежутки между соседними членами прогрессии содержат простое число. В самом деле, пусть это не так. Тогда:

$$\delta_n > aq^n (q - 1) \geq p_n (q - 1), \text{ т. е. } \frac{\delta_n}{p_n} > q - 1 > 0$$

для бесконечного множества значений n , что невозможно.

Из работ Гейльбронна следует, что в ряде чисел

$$1^{250}, 2^{250}, \dots, n^{250}, (n+1)^{250}, \dots \quad (7)$$

найдется такое число n , что, начиная с него, все промежутки между соседними членами (7) содержат хотя бы одно простое число.

III. Некоторые другие проблемы, касающиеся простых чисел.

Среди других проблем, касающихся распределения простых чисел, отметим еще две следующие:

1. Проблема близнецов.

2. Проблема Гольдбаха.

1. Если выше мы занимались вопросом о верхней границе δ_n , то аналогичные вопросы возникают для нижней границы. Именно, просматривая таблицу простых чисел, мы замечаем существование пар простых чисел, разность которых равна 2^1 . Например,

$$5, 7; 11, 13; 17, 19 \text{ и т. д.}$$

Такие числа называются близнецами.

Недавно (в 1919 г.) норвежский математик Вигго-Бруно (Viggo-Bruno) доказал, что если ряд

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \dots$$

содержит бесконечно много членов, то он сходится, т. е. близнецов «не очень много». Но до сих пор не известно даже, существует ли конечное или бесконечное множество близнецов? К этой проблеме, повидимому, еще не найдено должного подхода.

2. Гольдбах (Goldbach), современник Эйлера, в переписке с последним высказал положение, что всякое четное число есть сумма двух простых. Это положение очень легко иллюстрировать каким угодно числом примеров. Например,

$$10 = 7 + 3; 100 = 83 + 17 \text{ и т. д.}$$

Однако до сих пор не удается доказать этой теоремы во всей полноте и строгости: все попытки найти доказательство не удалось до сего времени.

Чтобы иметь представление о степени трудности этих проблем, заметим следующее: в 1922 г. английские математики Гарди (Hardy) и Литтлвуд (Littlewood) доказали теорему: Всякое нечетное число (достаточно большое) разлагается на сумму трех простых нечетных чисел, а подавляющее большинство ²⁾ четных чисел — на сумму двух

¹⁾ Напротив, существует только одна пара простых чисел, разность которых равна единице (стоящих рядом), именно, 2, 3, начиная с 3 все простые числа нечетны; следовательно, их «соседи» суть четные числа.

²⁾ Это выражение нужно понимать так: пусть $\nu(n)$ есть число четных чисел, подчиняющихся теореме Гольдбаха; тогда $\nu(n)$ асимптотически равно числу всех четных чисел.

простых. (Заметим, что первая часть этого утверждения есть следствие теоремы Гольдбаха¹⁾.) Но даже и это, ослабленное по сравнению с теоремой Гольдбаха, утверждение доказано упомянутыми учеными, базируясь на некоторой гипотезе относительно свойств функции, определяемой бесконечным рядом:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

(s — некоторое комплексное число).

В самое последнее время (1935 г.) советский ученый, акад. И. М. Виноградов, доказал теорему, близкую к теореме Гарди-Литльвуда. Именно: всякое нечетное²⁾ число может быть представлено в таком виде:

$$pp' + p_1 + p_2$$

(где p , p' , p_1 и p_2 — простые числа).

Замечательно то, что он не пользуется при этом никакой гипотезой, и сами его методы элементарны.

Можно было бы указать еще на целый ряд других проблем теории простых чисел, но узкие рамки настоящей статьи не позволяют это сделать.

ПРИМЕНЕНИЕ РЯДОВ К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ.

В. Н. Кравченко (Одесса).

Пусть две функции $F(x)$ и $f(x)$: 1) определены в интервале (a, b) , 2) непрерывны на концах интервала, 3) каждая из них имеет в этом интервале все последовательные производные до n -го порядка включительно и 4) одна из них, скажем $f(x)$, имеет внутри данного интервала производную первого порядка, не равную нулю.

Так как эти условия обнимают собою условия теоремы Коши, то для всякого x в интервале (a, b) существует такое ξ , для которого имеет место соотношение:

$$\frac{F(x) - F(a)}{f(x) - f(a)} = \frac{F'(\xi)}{f'(\xi)},$$

причем $a < \xi < x$. Из этой формулы находим:

$$F(x) - F(a) = \frac{F'(\xi)}{f'(\xi)} \cdot [f(x) - f(a)].$$

¹⁾ В самом деле, пусть утверждение Гольдбаха верно. Тогда $2n + 1 = 3 + 2(n - 1) = 3 + p_1 + p_2$, где p_1 и p_2 — простые числа.

²⁾ И даже любое.

Если в это последнее соотношение подставить a вместо ξ , то для сохранения знака равенства необходимо ввести некоторую поправку, скажем R_2 . Тогда

$$F(x) - F(a) = \frac{F'(a)}{f'(a)} [f(x) - f(a)] + R_2. \quad (1)$$

Обозначив отношение $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ через $\varphi_1(x)$ и решив равенство (1) относительно R_2 , получим:

$$R_2 = F(x) - F(a) - \varphi_1(a) \cdot [f(x) - f(a)],$$

откуда

$$\frac{R_2}{[f(x) - f(a)]^2} = \frac{F(x) - F(a) - \varphi_1(a) \cdot [f(x) - f(a)]}{[f(x) - f(a)]^2}.$$

Числитель и знаменатель правой части этого равенства при $x = a$ равны нулю, следовательно, между a и x существует такое ξ_1 , при котором

$$\frac{F(x) - F(a) - \varphi_1(a) \cdot [f(x) - f(a)]}{[f(x) - f(a)]^2} = \frac{F'(\xi_1) - \varphi_1(a) \cdot f'(\xi_1)}{2 \cdot [f(\xi_1) - f(a)] \cdot f'(\xi_1)},$$

откуда

$$\frac{F(x) - F(a) - \varphi_1(a) \cdot [f(x) - f(a)]}{[f(x) - f(a)]^2} = \frac{\frac{F'(\xi_1)}{f'(\xi_1)} - \varphi_1(a)}{2 \cdot [f(\xi_1) - f(a)]}.$$

Принимая во внимание, что $\frac{F'(\xi)}{f'(\xi)} = \varphi_1(\xi)$, видим, что при $\xi = a$ числитель и знаменатель правой части равны нулю, а потому существует такое ξ_2 ($a < \xi_2 < \xi_1$), что

$$\frac{\varphi_1(\xi_1) - \varphi_1(a)}{2 \cdot [f(\xi_1) - f(a)]} = \frac{\varphi_1'(\xi_2)}{2 \cdot f'(\xi_2)}.$$

Обозначая отношение $\frac{\varphi_1'(x)}{f'(x)}$ через $\varphi_2(x)$, получим:

$$\frac{R_2}{[f(x) - f(a)]^2} = \frac{\varphi_2(\xi_2)}{2}.$$

Отсюда

$$R_2 = \frac{\varphi_2(\xi_2)}{2} \cdot [f(x) - f(a)]^2,$$

и равенство (1) примет вид:

$$F(x) - F(a) = \varphi_1(a) \cdot [f(x) - f(a)] + \frac{1}{2!} \cdot \varphi_2(\xi_2) \cdot [f(x) - f(a)]^2.$$

Заменяя здесь ξ_2 через a , мы опять должны ввести для сохранения равенства некоторую поправку, скажем R_3 ; тогда

$$F(x) - F(a) = \varphi_1(a) \cdot [f(x) - f(a)] + \frac{1}{2!} \cdot \varphi_2(a) \cdot [f(x) - f(a)]^2 + R_3.$$

Определяя из этого равенства R_3 и разделив обе части на $[f(x) - f(a)]^3$, заметим, что числитель и знаменатель правой части

опять обращаются в нуль, коль скоро $x = a$. Поэтому аналогично предыдущему найдем:

$$\frac{R_3}{[f(x) - f(a)]^3} = \frac{\frac{\varphi'_1(\xi_3)}{f'(\xi_3)} - \varphi_2(a)}{2 \cdot 3 \cdot [f(x) - f(a)]} = \frac{\varphi_2(\xi_3) - \varphi_2(a)}{2 \cdot 3 \cdot [f(\xi_3) - f(a)]} = \frac{\varphi'_2(\xi_4)}{3! \cdot f'(\xi_4)},$$

где $a < \xi_4 < \xi_3 < x$.

Полагая

$$\frac{\varphi'_2(x)}{f'(x)} = \varphi_3(x),$$

получим:

$$R_3 = \frac{1}{3!} \cdot \varphi_3(\xi_4) \cdot [f(x) - f(a)]^3,$$

и, следовательно:

$$F(x) - F(a) = \varphi_1(a) \cdot [f(x) - f(a)] + \frac{1}{2!} \varphi_2(a) \cdot [f(x) - f(a)]^2 + \\ + \frac{1}{3!} \cdot \varphi_3(\xi_4) \cdot [f(x) - f(a)]^3.$$

Заменяя здесь ξ_4 на a , получим:

$$F(x) - F(a) = \varphi_1(a) \cdot [f(x) - f(a)] + \frac{1}{2!} \cdot \varphi_2(a) \cdot [f(x) - f(a)]^2 + \\ + \frac{1}{3!} \cdot \varphi_3(a) \cdot [f(x) - f(a)]^3 + R_4,$$

где R_4 — необходимая поправка вследствие замены ξ_4 на a .

Находя R_4 способом, аналогичным предыдущему, и продолжая подобные операции дальше, мы найдем вообще:

$$F(x) - F(a) = \varphi_1(a) \cdot [f(x) - f(a)] + \frac{1}{2!} \cdot \varphi_2(a) \cdot [f(x) - f(a)]^2 + \dots \\ \dots + \frac{1}{(n-1)!} \cdot \varphi_{n-1}(a) \cdot [f(x) - f(a)]^{n-1} + R_n, \quad (2)$$

где

$$\varphi_1(x) = \frac{F'(x)}{f'(x)}, \quad \varphi_2(x) = \frac{\varphi'_1(x)}{f'(x)}, \quad \dots, \quad \varphi_n(x) = \frac{\varphi'_{n-1}(x)}{f'(x)}$$

и

$$R_n = \frac{\varphi_n(\xi)}{n!} \cdot [f(x) - f(a)]^n,$$

причем $a < \xi < x$.

Если для данных функций $F(x)$ и $f(x)$ окажется, что, при безграничном возрастании n , R_n стремится к нулю, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$, то функцию $F(x)$ окажется возможным разложить в ряд:

$$F(x) - F(a) = \varphi_1(a) \cdot [f(x) - f(a)] + \frac{1}{2!} \cdot \varphi_2(a) \cdot [f(x) - f(a)]^2 + \dots \\ \dots + \frac{1}{n!} \cdot \varphi_n(a) \cdot [f(x) - f(a)]^n + \dots \quad (3)$$

при условии существования последовательных производных функций $F(x)$ и $f(x)$ любого порядка. Таким образом при некоторых усло-

виях данную функцию $F(x)$ можно разложить по степеням другой функции $f(x)$, если обе функции имеют производные любых порядков и удовлетворяют условиям теоремы Коши.

Назовем формулу (2) обобщенной формулой Коши, а ряд (3) — обобщенным рядом Тейлора. Мы называем ряд (3) обобщенным, так как из него ряд Тейлора получается как частный случай: именно, при $f(x) = x$ и при условии, что $F(x)$ имеет неограниченное число производных, имеем:

$$\varphi_1(a) = F'(a), \quad \varphi_2(a) = F''(a), \quad \dots, \quad \varphi_n(a) = F^{(n)}(a), \quad \dots,$$

и, следовательно, ряд (3) превратится в такой:

$$F(x) - F(a) = F'(a) \cdot (x - a) + \frac{1}{2!} F''(a) \cdot (x - a)^2 + \dots$$

Не останавливаясь на ряде (3) вообще, рассмотрим один частный случай этого ряда. Именно, положим $F(x) = x$.

Тогда

$$\begin{aligned} x - a &= \varphi_1(a) \cdot [f(x) - f(a)] + \frac{1}{2!} \varphi_2(a) \cdot [f(x) - f(a)]^2 + \dots \\ &\dots + \frac{1}{(n-1)!} \cdot \varphi_{n-1}(a) \cdot [f(x) - f(a)]^{n-1} + R_n, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$R_n = \frac{1}{n!} \varphi_n(\xi) \cdot [f(x) - f(a)]^n$$

и

$$a < \xi < x.$$

Этой формулой можно пользоваться для решения уравнений, точнее говоря, для нахождения действительных корней уравнения с любой степенью точности.

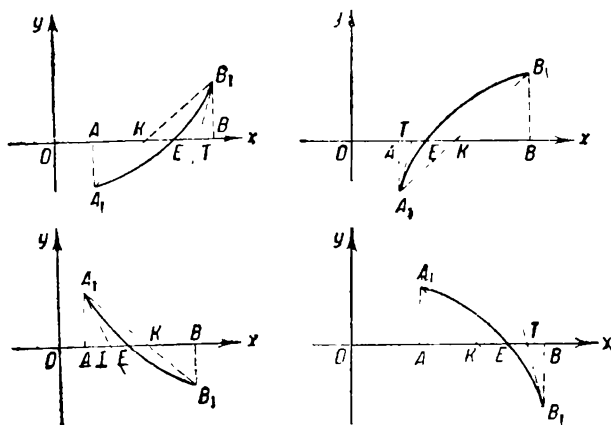
Пусть дано уравнение $f(x) = 0$ и известно, что один из действительных корней этого уравнения находится в интервале (α, β) , причем в указанном интервале других корней нет. В таком случае, как известно, $f(\alpha)$ и $f(\beta)$ будут разных знаков. Далее, как известно, можно всегда установить такой интервал (α, β) , что, определив величины $f'(\alpha)$ и $f''(\alpha)$, а также $f'(\beta)$ и $f''(\beta)$, мы получим только один из таких четырех случаев:

- 1) $f(\alpha) < 0, \quad f'(\alpha) > 0, \quad f''(\alpha) > 0,$
 $f(\beta) > 0, \quad f'(\beta) > 0, \quad f''(\beta) > 0;$
- 2) $f(\alpha) < 0, \quad f'(\alpha) > 0, \quad f''(\alpha) < 0,$
 $f(\beta) > 0, \quad f'(\beta) > 0, \quad f''(\beta) < 0;$
- 3) $f(\alpha) > 0, \quad f'(\alpha) < 0, \quad f''(\alpha) > 0,$
 $f(\beta) < 0, \quad f'(\beta) < 0, \quad f''(\beta) > 0;$
- 4) $f(\alpha) > 0, \quad f'(\alpha) < 0, \quad f''(\alpha) < 0,$
 $f(\beta) < 0, \quad f'(\beta) < 0, \quad f''(\beta) < 0,$

соответствующих следующим схематическим графикам функции $y = f(x)$ в интервале (α, β) , представленным на чертеже отрезком AB (фиг. 1).

Знаки $f'(\alpha)$ и $f'(\beta)$ показывают направление касательных в точках A_1 и B_1 , а знаки $f''(\alpha)$ и $f''(\beta)$ — направление вогнутости кривой $y = f(x)$.

Если $OA = \alpha$, $OB = \beta$ и $OE = c$ [c — действительный корень уравнения $f(x) = 0$, находящийся в интервале (α, β)], то по способу Ньютона первое приближение к корню c мы получаем, находя абсциссы точки пересечения с осью абсцисс хорды, соединяющей точки A_1 и B_1 (именно, точки K), и касательной, проведенной в той конечной точке дуги A_1B_1 , чтобы она пересекала ось x между точкой E



Фиг. 1.

и концом абсциссы точки касания. Абсциссы точек K и T и будут первыми приближениями к действительному корню, т. е. к абсциссе точки E . Вычисление абсцисс k и t точек K и T производится, как известно, по формулам:

$$k = \beta - \frac{\alpha - \beta}{f(\alpha) - f(\beta)} \cdot f(\beta) \quad \left[\text{или} \quad k = \alpha - \frac{\alpha - \beta}{f(\alpha) - f(\beta)} \cdot f(\alpha) \right]$$

и

$$t = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \quad (\text{для случаев 2 и 3})$$

или

$$t = \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} \quad (\text{для случаев 1 и 4}).$$

Найдя t и k , мы для c берем среднее между ними, если разность $(t - k)$ достаточно мала (сравнительно с той точностью, с которой необходимо найти корень уравнения). Если же разность $(t - k)$ недостаточно мала, то точки T и K мы рассматриваем как новый интервал, в котором находится искомый корень c , и тем же способом определяем более близкие к E точки T и K и т. д. до тех пор, пока разность $(t_i - k_i)$ не будет соответствовать требуемой точности.

Для определения каких-нибудь t_i и k_i , очевидно, будут служить формулы:

$$k_i = k_{i-1} - \frac{t_{i-1} - k_{i-1}}{f(t_{i-1}) - f(k_{i-1})} \cdot f(k_{i-1})$$

и

$$t_i = t_{i-1} - \frac{f(t_{i-1})}{f'(t_{i-1})} \quad \text{или} \quad t_i = k_i - \frac{f(k_{i-1})}{f'(k_{i-1})}.$$

Отсюда понятно, что с каждым новым приближением вычисление $f(t_i)$, $f'(t_i)$, $f(k_i)$ и $f'(k_i)$ становится все более сложным, так как числа десятичных знаков t_i и k_i будут больше, чем t_{i-1} и k_{i-1} . Чтобы избежать этих повторных вычислений величины функции $f(t)$, $f(t_1)$, $f(t_2)$, ...; $f(k)$, $f(k_1)$, $f(k_2)$, ... и производных $f'(t)$, $f'(t_1)$, $f'(t_2)$, ..., $f'(k)$, $f'(k_1)$, $f'(k_2)$, ..., можно воспользоваться формулой (4). Действительно, пусть a есть первое приближение, скажем, корня x_1 уравнения $f(x) = 0$, именно приближение, соответствующее точке T . Тогда, полагая в формуле (4) $x = c$ и принимая во внимание, что $f(c) = 0$, получим:

$$c = x_1 - \varphi_1(x_1) \cdot f(x_1) + \frac{1}{2!} \varphi_2(x_1) \cdot [f(x_1)]^2 - \frac{1}{3!} \varphi_3(x_1) \cdot [f(x_1)]^3 + \dots \\ \dots + \frac{1}{(n-1)!} \varphi_{n-1}(x_1) \cdot [f(x_1)]^{n-1} + R_n, \quad (5)$$

где

$$R_n = \frac{1}{n!} \varphi_n(\xi) [f(x_1)]^n \quad (\xi - \text{среднее между } x_1 \text{ и } c)$$

и

$$\varphi_1(x_1) = \frac{1}{f'(x_1)}, \quad \varphi_2(x_1) = \frac{\varphi'_1(x_1)}{f'(x_1)} \text{ и т. д.,}$$

или

$$\varphi_1(x_1) = \frac{1}{f'(x_1)}, \quad \varphi_2(x_1) = -\frac{f''(x_1)}{[f'(x_1)]^3}, \\ \varphi_3(x_1) = \frac{-f'''(x_1) \cdot f'(x_1) + 3 \cdot [f''(x_1)]^2}{[f'(x_1)]^5} \text{ и т. д.}$$

Вообще составление функции $\varphi(x)$ не представляет затруднений. В самом деле, если числители дроби, выражающей функцию $\varphi_i(x)$, обозначим через $\psi_i(x)$, то, очевидно,

$$\psi_1(x) = 1; \quad \psi_2(x) = \psi'_1(x) \cdot f'(x) - \psi_1(x) \cdot f''(x), \\ \psi_3(x) = \psi'_2(x) \cdot f'(x) - 3\psi_2(x) \cdot f''(x), \\ \psi_4(x) = \psi'_3(x) \cdot f'(x) - 5\psi_3(x) \cdot f''(x) \text{ и т. д.}$$

Вообще

$$\psi_i(x) = \psi'_{i-1}(x) \cdot f'(x) - (2i-3) \psi_{i-1}(x) \cdot f''(x),$$

знаменателем же функции $\varphi_i(x)$ будет $[f'(x)]^{2i-1}$.

Для некоторых функций $f(x)$ может оказаться, что в формуле (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$. В таких случаях корень уравнения $f(x) = 0$, очевидно, может быть выражен таким рядом:

$$c = x_1 - \varphi_1(x_1) \cdot f(x_1) + \frac{\varphi_2(x_1)}{2!} [f(x_1)]^2 - \dots \pm \frac{\varphi_n(x_1)}{n!} [f(x_1)]^n \pm \dots \quad (6)$$

точки пересечения с осью x хорды, соединяющей точку дуги A_1B_1 , абсцисса которой есть x_n , и конец дуги, абсцисса которого не была принята за первое приближение корня. Именно, если $x_1 = \beta$, то k_n вычисляем по формуле:

$$k_n = \beta - \frac{x_n - \beta}{f(x_n) - f(\beta)} \cdot f(\beta)$$

и по формуле:

$$k_n = \alpha - \frac{x_n - \alpha}{f(x_n) - f(\alpha)} \cdot f(\alpha),$$

если $x_1 = \alpha$.

Очевидно, что в том случае, когда $x_1 = \alpha$, т. е. в случаях 2 и 3 (фиг. 1),

$$x_1 < x_n < k_n,$$

в случаях 1 и 4 (фиг. 1), т. е. при $x_1 = \beta$,

$$x_1 > x_n > k_n,$$

а потому абсолютная величина разности $x_n - k_n$

$$|x_n - k_n|$$

вообще даст возможность оценить погрешность, с которой было вычислено $x_n \approx c$.

Для уточнения результата и более точной оценки найденного корня можно, зная k_n , найти $f(k_n)$ и затем, воспользовавшись формулой:

$$k = \beta - \frac{\alpha - \beta}{f(\alpha) - f(\beta)} \cdot f(\beta),$$

найти точку (L) пересечения с осью абсцисс хорды, соединяющей точки $[k_n; f(k_n)]$ и $[x_n; f(x_n)]$, т. е. принимая в указанной формуле за α и β соответственно k_n и x_n . Соответствующее уточнение ясно из чертежа (фиг. 2).

Таким образом интервал, в котором находится корень уравнения, будет уже определяться не отрезком K_nT_n , а отрезком $LT_n < K_nT_n$.

Покажем на примере, как производить и располагать вычисления.

1) Найти корень уравнения: $x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = 0$, находящийся между -2 и -1 .

Для вычисления $f(-1)$ и $f(-2)$ и производных от $f(x)$ при $x = -1$ в $x = -2$ воспользуемся схемой Горнера, причем, так как мы ограничимся всего четырьмя членами ряда (6), достаточно определить производные только f' , f'' и f''' .

Имеем:

	1	0	-2	0	-3	4	-5	6
-2	-2	4	-4		8	-10	12	-14
	-2	2	-4		5	-6	7	-8 = $f(-2)$
	-2	8	-20		48	-106	224	
	-4	10	-24		53	-112	231	= $f'(-2)$
	-2	12	-44		136	-378		

	-6	22	-68	189	$-490 = \frac{f''(-2)}{2}; f''(-2) = -980$
	-2	16	-76	288	
	-8	38	-144	477	$= \frac{f'''(-2)}{6}; f'''(-2) = 2862$

точно так же

-1	1	0	-2	0	-3	4	-5	6
	-1	1	1	-1	4	-8	13	
	-1	-1	1	-4	8	-13	$19 = f(-1)$	
	-1	2	-1	0	4	-12		
	-2	1	0	-4	12	$-25 = f'(-1)$		
	-1	3	-4	4	0			
	-3	4	-4	0	$12 = \frac{f''(-1)}{2}; f''(-1) = 24$			

Так как $f''(-2)$ и $f''(-1)$ оказались разнозначными, т. е. кривая между точками $[-1; f(-1)]$ и $[-2; f(-2)]$ имеет перегиб, то является необходимым установить более узкий интервал.

Возьмем вместо -1 , $-1,5$; тогда имеем:

$-\frac{3}{2}$	1	0	-2	0	-3	4	-5	6
	$-\frac{3}{2}$	9	3	9	117	735	3 165	
	$-\frac{2}{2}$	4	$-\frac{8}{8}$	16	32	$-\frac{64}{64}$	$\frac{128}{128}$	
	$-\frac{3}{2}$	1	3	39	245	$-\frac{1 055}{64}$	$30,72624 = f(-1,5)$	
	$-\frac{2}{2}$	4	$-\frac{8}{8}$	16	32	$-\frac{64}{64}$		
	3	18	57	180	423	534		
	$-\frac{2}{2}$	4	$-\frac{8}{8}$	16	32	$-\frac{64}{64}$		
	3	19	60	141	178	$-\frac{521}{64} = f'(-1,5)$		
	$-\frac{2}{2}$	4	$-\frac{8}{8}$	16	32	$-\frac{64}{64}$		
	3	27	138	594	2 205			
	$-\frac{2}{2}$	4	$-\frac{8}{8}$	16	32	$-\frac{64}{64}$		
	$-\frac{9}{2}$	46	198	735	$-\frac{2 383}{32} = \frac{f''(-1,5)}{2}$			

Соответствующий функции $f(x)$ в интервале $(-2; -1,5)$ схематический график изображен на фиг. 3, а потому за x берем -2 .

Составляем далее функции φ :

$$\varphi_1(-2) = \frac{1}{231}; \quad \varphi_2(-2) = \frac{980}{231^2}; \quad \varphi_3(-2) = \frac{-2862 \cdot 231 + 3 \cdot 960400}{231^3},$$

следовательно,

$$x_4 = -2 + \frac{8}{231} + \frac{1}{2} \cdot \frac{980}{231^2} \cdot 64 + \frac{1}{6} \cdot \frac{-2862 \cdot 231 + 3 \cdot 960400}{231^3} \cdot 512. \quad (A)$$

Для вычисления четвертого члена удобно воспользоваться логарифмическими таблицами. Вообще для вычисления величины $\frac{\varphi_n(x_1)}{n!} [f(x_1)]^n$, особенно

в том случае, когда $f(x_1)$, $f'(x_1)$, \dots , $f^{(n)}(x_1)$ окажутся числами многозначными, удобно пользоваться логарифмами, так как каждый такой член ряда может быть разложен на сумму дробей, например, член

$$\frac{1}{3!} f'''(x_1) \cdot [f(x_1)]^3 = -\frac{f'''(x_1) \cdot f'(x_1) \cdot [f(x_1)]^3}{6 \cdot [f'(x_1)]^6} + \frac{[f''(x_1)]^2 \cdot [f(x_1)]^3}{2 \cdot [f'(x_1)]^6},$$

причем количество отыскиваемых логарифмов, вообще говоря, будет невелико. Например при четырех членах нужно найти только $\lg f$, $\lg f'$, $\lg f''$ и $\lg f'''$. При этом располагаем действия так:

$$\begin{aligned} \lg 3 &= 0,47712, \\ 5 \lg 231 &= 2,36361 \cdot 5 = 11,81805, \\ \lg 512 &= 2,70927, \\ \lg 2862 &= 3,45367, \\ \lg 960400 &= 5,98245, \end{aligned}$$

поэтому:

3,45667	0,47712
2,36361	5,98245
2,70927	2,70927
8,52955	9,16884
- 11,81806	- 11,81806
4,71149	3,35078

$$N = 0,000514$$

$$N = 0,002243$$

$$- 0,000514$$

$$0,001739$$

$$6$$

$$0,0002898$$

а значит

$$x_4 = -2 + 0,03463 + 0,00256 + 0,00029,$$

откуда

$$x_4 = -1,96252.$$

Для оценки погрешности вычисляем $f(-1,96252) = -0,0065$ и находим:

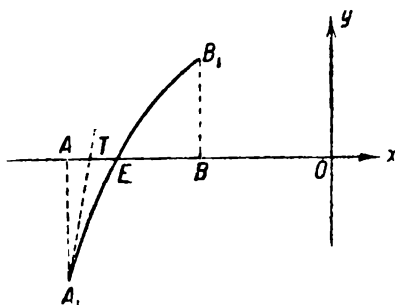
$$k_4 = -1,5 - \frac{-1,5 + 1,96252}{30,72624 + 0,0065} \cdot 30,72624 = -1,96246.$$

Таким образом, полагая $s = -1,96249$, мы делаем ошибку, не превышающую 0,00003, т. е. определяем корень с точностью до пятого десятичного знака.

Если тот же корень искать по способу Ньютона, то, очевидно, лишним в произведенных вычислениях является нахождение $f'''(-2)$. Но, найдя первое приближение, т. е. по сути ограничиваясь двумя первыми членами равенства (A):

$$x_2 = -2 + 0,03463 = -1,96537,$$

для определения второго приближения требовалось бы найти $f(-1,96537)$ и $f'(-1,96537)$, что, конечно, сопряжено с большими сравнительно вычислениями, чем вычисление даже третьего и четвертого членов равенства (A). А могло случиться, что пришлось бы вычислять и третье приближение. Таким образом пользование формулой (4) значительно сокращает вычислительную работу. Что касается оценки погрешности, то как способ ньютоновских приближений, так и пользование формулой (4) требуют совершенно одинаковых вычислений.



Фиг. 3.

ГАРМОНИЧЕСКИЙ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЙ РЯД.

А. М. Басанец (Николаев, УССР).

§ 1. Гармонический знакопеременный ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \quad (1)$$

является рядом сходящимся, и его сумма $S = \ln 2$. Так как ряд (1) сходится не абсолютно, то сумма его зависит от порядка, в котором складываются члены этого ряда. В курсах анализа (Ш.-Ж. де-ля-Валле-Пуссена, Курс анализа бесконечно малых, т. I, стр. 425, изд. 1933 г.; проф. А. А. Адамов, Анализ бесконечно малых, ч. I, Дифференциальное исчисление, стр. 34, изд. 1925 г.) вычислены суммы рядов, полученных из ряда (1) путем такой перестановки его членов, когда за каждым положительным членом ряда (1) следуют два члена отрицательных и, наоборот, когда за каждым двумя положительными членами ряда (1) следует один отрицательный. Мы имеем в виду несколько обобщить эти результаты.

§ 2. Составим из ряда (1) перестановкою его членов новый ряд:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2^{p+1}-1} - \frac{1}{2} + \dots, \quad (2)$$

в котором за каждым 2^p положительными членами следует один отрицательный.

Обозначим частную сумму ряда (2) через $U_{2^p n}$. Следовательно,

$$U_{2^p n} = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{2^{p+1}i - (2^{p+1}-1)} + \frac{1}{2^{p+1}i - (2^{p+1}-3)} + \dots + \frac{1}{2^{p+1}i - 1} - \frac{1}{2i} \right). \quad (3)$$

Частная сумма $S_{2^{p+1}n}$ ряда (1), в котором рядом стоящие члены соединены в группы по 2^{p+1} членов в каждой, выразится формулой:

$$S_{2^{p+1}n} = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{2^{p+1}i - (2^{p+1}-1)} - \frac{1}{2^{p+1}i - (2^{p+1}-2)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2^{p+1}i - (2^{p+1}-3)} - \frac{1}{2^{p+1}i - (2^{p+1}-4)} + \dots + \frac{1}{2^{p+1}i - 1} - \frac{1}{2^{p+1}i} \right). \quad (4)$$

Очевидно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2^{p+1}n} = S$.

При $p = 1$ из равенств (3) и (4) находим:

$$U_{2n} = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{4i-3} + \frac{1}{4i-1} - \frac{1}{2i} \right) \quad (5)$$

и

$$S_{4n} = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{4i-3} - \frac{1}{4i-2} + \frac{1}{4i-1} - \frac{1}{4i} \right). \quad (6)$$

Вычитая равенство (6) из равенства (5), получаем:

$$U_{2n} - S_{4n} = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{4i-2} - \frac{1}{4i} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i} \right) = \frac{1}{2} S_{2n}.$$

Следовательно,

$$U_{2n} = \frac{1}{2} S_{2n} + S_{4n} \quad (7)$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_{2n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} S_{4n} = \frac{3}{2} S.$$

Докажем теперь, что вообще

$$U_{2^p n} = \frac{1}{2} S_{2n} + \frac{1}{2} S_{4n} + \frac{1}{2} S_{8n} + \dots + \frac{1}{2} S_{2^{p+1}n} + S_{2^{p+1}n}, \quad (8)$$

где $p \geq 1$.

Мы уже убедились в справедливости этого равенства для $p = 1$. Предположив, что оно справедливо для $p = k$, докажем его для

$$p = k + 1.$$

Из равенства (4), полагая $p = 0, 1, 2, 3, \dots, k, (k+1), (k+2)$, находим:

$$\left. \begin{aligned} S_{2n} &= \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i} \right), \\ S_{4n} &= \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{4i-3} - \frac{1}{4i-2} + \frac{1}{4i-1} - \frac{1}{4i} \right), \\ &\dots \\ S_{2^k n} &= \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{2^k i - (2^k - 1)} - \frac{1}{2^k i (2^k - 2)} + \frac{1}{2^k i - (2^k - 3)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2^k i - (2^k - 4)} + \dots + \frac{1}{2^k i - 1} - \frac{1}{2^k i} \right), \\ S_{2^{k+1} n} &= \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{2^{k+1} i - (2^{k+1} - 1)} - \frac{1}{2^{k+1} i - (2^{k+1} - 2)} + \frac{1}{2^{k+1} i - (2^{k+1} - 3)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2^{k+1} i - (2^{k+1} - 4)} + \dots + \frac{1}{2^{k+1} i - 1} - \frac{1}{2^{k+1} i} \right), \\ S_{2^{k+2} n} &= \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{2^{k+2} i - (2^{k+2} - 1)} - \frac{1}{2^{k+2} i - (2^{k+2} - 2)} + \frac{1}{2^{k+2} i - (2^{k+2} - 3)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2^{k+2} i - (2^{k+2} - 4)} + \dots + \frac{1}{2^{k+2} i - 1} - \frac{1}{2^{k+2} i} \right). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Прибавляя к обеим частям равенства (8), в котором положено $p = k$, величину $-\frac{1}{2} S_{2^{k+1}n} + S_{2^{k+2}n}$, получим:

$$\begin{aligned} U_{2^k n} - \frac{1}{2} S_{2^{k+1}n} + S_{2^{k+2}n} &= \frac{1}{2} S_{2n} + \frac{1}{2} S_{4n} + \frac{1}{2} S_{8n} + \dots \\ &\dots + \frac{1}{2} S_{2^{k+1}n} + S_{2^{k+2}n}. \end{aligned}$$

Из равенств (3) и (9), полагая в них $p = k$, находим:

$$\begin{aligned}
 & U_{2^k n} - \frac{1}{2} S_{2^{k+1} n} + S_{2^{k+2} n} = \\
 = & \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{2^{k+1} i - (2^{k+1} - 1)} + \frac{1}{2^{k+1} i - (2^{k+1} - 3)} + \frac{1}{2^{k+1} i - (2^{k+1} - 5)} + \dots + \frac{1}{2^{k+1} i - 1} - \frac{1}{2i} - \right. \\
 & - \frac{1}{2^{k+2} i - (2^{k+2} - 2)} + \frac{1}{2^{k+2} i - (2^{k+2} - 4)} - \frac{1}{2^{k+2} i - (2^{k+2} - 6)} + \\
 & + \frac{1}{2^{k+2} i - (2^{k+2} - 8)} - \dots - \frac{1}{2^{k+2} i - 2} + \frac{1}{2^{k+2} i} + \\
 & + \frac{1}{2^{k+2} i - (2^{k+2} - 1)} - \frac{1}{2^{k+2} i - (2^{k+2} - 2)} + \frac{1}{2^{k+2} i - (2^{k+2} - 3)} - \\
 & - \frac{1}{2^{k+2} i - (2^{k+2} - 4)} + \dots + \frac{1}{2^{k+2} i - 1} - \frac{1}{2^{k+2} i} \left. \right). \quad (10)
 \end{aligned}$$

Напишем последнее равенство в такой форме:

$$\begin{aligned}
 & U_{2^k n} - \frac{1}{2} S_{2^{k+1} n} + S_{2^{k+2} n} = \\
 = & \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{2^{k+1} i - (2^{k+1} - 1)} + \frac{1}{2^{k+1} i - (2^{k+1} - 3)} + \frac{1}{2^{k+1} i - (2^{k+1} - 5)} + \dots + \frac{1}{2^{k+1} i - 1} - \frac{1}{2i} - \right. \\
 & - \frac{1}{2^{k+2} i - (2^{k+2} - 2)} - \frac{1}{2^{k+2} i - (2^{k+2} - 6)} - \frac{1}{2^{k+2} i - (2^{k+2} - 10)} - \dots - \frac{1}{2^{k+2} i - 2} + \\
 & + \frac{1}{2^{k+2} i - (2^{k+2} - 4)} + \frac{1}{2^{k+2} i - (2^{k+2} - 8)} + \frac{1}{2^{k+2} i - (2^{k+2} - 12)} + \dots + \frac{1}{2^{k+2} i} - \\
 & - \frac{1}{2^{k+2} i - (2^{k+2} - 4)} - \frac{1}{2^{k+2} i - (2^{k+2} - 8)} - \frac{1}{2^{k+2} i - (2^{k+2} - 12)} - \dots - \frac{1}{2^{k+2} i} - \\
 & - \frac{1}{2^{k+2} i - (2^{k+2} - 2)} - \frac{1}{2^{k+2} i - (2^{k+2} - 6)} - \frac{1}{2^{k+2} i - (2^{k+2} - 10)} - \dots - \frac{1}{2^{k+2} i - 2} + \\
 & + \frac{1}{2^{k+2} i - (2^{k+2} - 1)} + \frac{1}{2^{k+2} i - (2^{k+2} - 3)} + \frac{1}{2^{k+2} i - (2^{k+2} - 5)} + \dots + \frac{1}{2^{k+2} i - 1} \left. \right). \quad (11)
 \end{aligned}$$

В первой строке правой части равенства (11) находятся все члены первой строки равенства (10); во второй строке — все отрицательные, а в третьей — все положительные члены второй и третьей строк равенства (10); строка четвертая равенства (11) содержит отрицательные члены четвертой и пятой строк равенства (10), у которых знаменатель делится на 4; пятая строка содержит только те отрицательные члены четвертой и пятой строк равенства (10), у которых знаменатель делится на 2, но не делится на 4, и, наконец, последняя строка содержит все положительные члены двух последних строк равенства (10).

Рассматривая правую часть равенства (11), замечаем, что члены третьей строки сократятся с членами четвертой строки, а члены второй и пятой строк после приведения подобных сократятся со всеми положительными членами строки первой. Следовательно,

$$U_{2k} - \frac{1}{2} S_{2^{k+1}n} + S_{2^{k+2}n} = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{2^{k+2}i - (2^{k+2}-1)} + \frac{1}{2^{k+2}i - (2^{k+2}-3)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2^{k+2}i - (2^{k+2}-5)} + \dots + \frac{1}{2^{k+2}i - 1} - \frac{1}{2i} \right). \quad (12)$$

Выражение, стоящее в правой части равенства (12), представляет собою как раз $U_{2^{k+1}n}$, в чем легко убедиться, подставляя в (3) значение $p = k + 1$.

Итак, равенство (8) справедливо для всякого целого p .

Принимая во внимание, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{4n} = \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2^{p+1}n} = S,$$

имеем из равенства (8) путем перехода к пределу:

$$U_{2^p} = \left(1 + \frac{p}{2}\right) S, \quad (13)$$

где $U_{2^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} U_{2^p n}$ и S — сумма ряда (1).

§ 3. Рассмотрим теперь ряд, составленный из ряда (1) перестановкою его членов, в котором за каждым положительным членом следует 2^p отрицательных, т. е. ряд вида:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \dots - \frac{1}{2^{p+1}} + \dots \quad (14)$$

Будем обозначать частную сумму ряда (14) через $U_{-2^p n}$. Следовательно,

$$U_{-2^p n} = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2^{p+1}i - (2^{p+1}-2)} - \frac{1}{2^{p+1}i - (2^{p+1}-4)} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2^{p+1}i - (2^{p+1}-6)} - \dots - \frac{1}{2^{p+1}i} \right). \quad (15)$$

При $p = 2$ имеем из (15):

$$U_{-4n} = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{8i-6} - \frac{1}{8i-4} - \frac{1}{8i-2} - \frac{1}{8i} \right). \quad (16)$$

Из равенства (4) при $p = 1$ находим:

$$S_{4n} = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{4i-3} - \frac{1}{4i-2} + \frac{1}{4i-1} - \frac{1}{4i} \right). \quad (17)$$

Умножая обе части равенства (17) на $\frac{1}{2}$ и складывая с равенством (16), получим:

$$U_{-4n} + \frac{1}{2} S_{4n} = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{4i-2} - \frac{1}{4i} \right) = \\ = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i} \right) = \frac{1}{2} S_{2n},$$

или

$$U_{-4n} = \frac{1}{2} S_{2n} - \frac{1}{2} S_{4n}. \quad (18)$$

Докажем, что для любого p имеет место равенство:

$$U_{-2^p n} = \frac{1}{2} S_{2n} - \frac{1}{2} S_{4n} - \frac{1}{2} S_{8n} - \dots - \frac{1}{2} S_{2^p n}. \quad (19)$$

Справедливость этого равенства для $p=2$ доказана, как это видно из равенства (18). Полагая, что равенство (19) справедливо для $p=k$, докажем его для $p=k+1$.

Вычтем из обеих частей равенства (19), в котором положено $p=k$, величину $\frac{1}{2} S_{2^{k+1}n}$. В таком случае получим:

$$U_{-2^k n} - \frac{1}{2} S_{2^{k+1}n} = \frac{1}{2} S_{2n} - \frac{1}{2} S_{4n} - \frac{1}{2} S_{8n} - \dots - \frac{1}{2} S_{2^k n} - \frac{1}{2} S_{2^{k+1}n}. \quad (20)$$

Из равенства (15), полагая в нем $p=k$, и равенств (9) находим, что

$$\begin{aligned} & U_{-2^k n} - \frac{1}{2} S_{2^{k+1}n} = \\ &= \sum_{i=1}^{t=n} \left(\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2^{k+1}i - (2^{k+1}-2)} - \frac{1}{2^{k+1}i - (2^{k+1}-4)} - \frac{1}{2^{k+1}i - (2^{k+1}-6)} - \dots - \frac{1}{2^{k+1}i} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2^{k+2}i - (2^{k+2}-2)} + \frac{1}{2^{k+2}i - (2^{k+2}-4)} - \frac{1}{2^{k+2}i - (2^{k+2}-6)} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2^{k+2}i - (2^{k+2}-8)} - \dots - \frac{1}{2^{k+2}i - 2} + \frac{1}{2^{k+2}i} \right). \quad (21) \end{aligned}$$

Напишем равенство (21) в форме:

$$\begin{aligned} & U_{-2^k n} - \frac{1}{2} S_{2^{k+1}n} = \\ &= \sum_{i=1}^{t=n} \left(\frac{1}{2i-1} - \frac{2}{2^{k+2}i - (2^{k+2}-4)} - \frac{2}{2^{k+2}i - (2^{k+2}-8)} - \frac{2}{2^{k+2}i - (2^{k+2}-12)} - \dots - \frac{2}{2^{k+2}i} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2^{k+2}i - (2^{k+2}-4)} + \frac{1}{2^{k+2}i - (2^{k+2}-8)} + \frac{1}{2^{k+2}i - (2^{k+2}-12)} + \dots + \frac{1}{2^{k+2}i} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2^{k+2}i - (2^{k+2}-2)} - \frac{1}{2^{k+2}i - (2^{k+2}-6)} - \frac{1}{2^{k+2}i - (2^{k+2}-10)} - \dots - \frac{1}{2^{k+2}i - 2} \right). \quad (22) \end{aligned}$$

В первой строке равенства (22) содержатся все члены первой строки равенства (21), причем у всех отрицательных членов числитель и знаменатель увеличен в два раза. В строке второй равенства (22) находятся все положительные, а в строке третьей все отрицательные члены второй и третьей строк равенства (21).

В правой части равенства (22) первая и вторая строки содержат подобные члены. После приведения подобных членов получим равенство (22) в таком виде:

$$U_{-2^k n} - \frac{1}{2} S_{2^{k+1} n} = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2^{k+2} i - (2^{k+2} - 2)} - \frac{1}{2^{k+2} i - (2^{k+2} - 4)} - \dots - \frac{1}{2^{k+2} i - (2^{k+2} - 6)} - \dots - \frac{1}{2^{k+2} i} \right). \quad (23)$$

Выражение, стоящее в правой части равенства, представляет собою $U_{-2^{k+1} n}$, что видно из (15), если в нем положить $p = k + 1$. Следовательно, равенство (19) доказано для любого $p \geq 2$. При $p = 1$ из равенства (15) находим:

$$U_{-2n} = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{4i-2} - \frac{1}{4i} \right). \quad (24)$$

Вычитая из обеих частей (24) S_{2n} , получим:

$$U_{-2n} - S_{2n} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i} \right) = -\frac{1}{2} S_{2n},$$

или

$$U_{-2n} = \frac{1}{2} S_{2n}.$$

Таким образом равенство (19) будет справедливо для любого целого p .

Прибавляя и отнимая в правой части равенства (19) величину $\frac{1}{2} S_{2n}$, приведем его к виду:

$$U_{-2^p n} = S_{2n} - \frac{1}{2} S_{2n} - \frac{1}{2} S_{4n} - \frac{1}{2} S_{8n} - \dots - \frac{1}{2} S_{2^p n}, \quad (25)$$

откуда путем перехода к пределам находим:

$$U_{-2^p} = \left(1 - \frac{p}{2} \right) S, \quad (26)$$

где $U_{-2^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} U_{2^p n}$.

§ 4. Суммы U_{2^p} и U_{-2^p} , определяемые формулами (13) и (26), связаны между собою, что легко установить, пользуясь равенствами (3) и (15).

Действительно, складывая левые и правые части равенств (3) и (15), находим:

$$U_{2^p n} + U_{-2^p n} = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{2i-1} + \frac{1}{2^{p+1} i - (2^{p+1} - 1)} - \frac{1}{2^{p+1} i - (2^{p+1} - 2)} + \dots + \frac{1}{2^{p+1} i - 1} - \frac{1}{2^{p+1} i} - \frac{1}{2i} \right). \quad (27)$$

Вычитая из обеих частей (27) S_{2n} , получим:

$$U_{2^p n} + U_{-2^p n} - S_{2n} = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{2^{p+1} i - (2^{p+1} - 1)} - \frac{1}{2^{p+1} i - (2^{p+1} - 2)} + \dots + \frac{1}{2^{p+1} i - 1} - \frac{1}{2^{p+1} i} \right). \quad (28)$$

Правая часть равенства (28) представляет собою $S_{2^{p+1}n}$, как это видно из (4), поэтому

$$U_{2^p n} + U_{-2^p n} = S_{2n} + S_{2^{p+1}n}; \quad (29)$$

отсюда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_{2^p n} + \lim_{n \rightarrow \infty} U_{-2^p n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2^{p+1}n},$$

или

$$U_{2^p} + U_{-2^p} = 2S, \quad (30)$$

так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2^{p+1}n} = S.$$

Формула (30) устанавливает зависимость между U_{2^p} и U_{-2^p} и дает возможность вывести любую из формул (13) или (26), зная только одну из них.

Соединяя формулы (13) и (26) в одну, находим окончательно:

$$U_{\pm 2^p} = \left(1 \pm \frac{p}{2}\right) S, \quad (31)$$

причем знак $+$ берем в формуле (31) для 2^p положительных членов и знак $-$ для 2^p отрицательных членов.

§ 5. Выведем теперь формулу для определения суммы ряда, полученного из ряда (1) путем такой перестановки его членов, когда за каждым 2^p положительными членами ряда (1) следуют 2^q отрицательных и, наоборот, когда за 2^q положительными членами следуют 2^p отрицательных, т. е. для ряда такого вида:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2^{p+1}-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{2^{q+1}} + \dots \quad (32)$$

Обозначим частную сумму ряда (32) через $U_{2^p 2^q n}$. Тогда

$$\begin{aligned} U_{2^p 2^q n} = & \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{2^{p+1}i - (2^{p+1}-1)} + \frac{1}{2^{p+1}i - (2^{p+1}-3)} + \frac{1}{2^{p+1}i - (2^{p+1}-5)} + \dots \right. \\ & \dots + \frac{1}{2^{p+1}i - 1} - \frac{1}{2^{q+1}i - (2^{q+1}-2)} - \frac{1}{2^{q+1}i - (2^{q+1}-4)} - \dots \\ & \left. \dots - \frac{1}{2^{q+1}i - 2} - \frac{1}{2^{q+1}i} \right); \end{aligned} \quad (33)$$

прибавляя к обеим частям равенства (33) величину $(-U_{2^p n} - U_{-2^q n})$, получим:

$$U_{2^p 2^q n} - U_{2^p n} - U_{-2^q n} = - \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i} \right) = -S_{2n},$$

откуда

$$U_{2^p 2^q n} = U_{2^p n} + U_{-2^q n} - S_{2n}, \quad (34)$$

где $U_{2^p n}$ и $U_{-2^q n}$ — суммы, определяемые равенствами (3) и (15), причем в равенстве (15) p заменено через q .

Равенство (34) справедливо при любых целых и положительных p и q . Из равенства (34) путем перехода к пределам, находим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_{2^p 2^q n} = \lim_{n \rightarrow \infty} U_{2^p n} + \lim_{n \rightarrow \infty} U_{2^q n} - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n},$$

или, обозначая $\lim_{n \rightarrow \infty} U_{2^p 2^q n} = U_{2^p 2^q}$ и заменяя слагаемые в правой части последнего равенства по формулам (13) и (26), находим окончательно:

$$U_{2^p 2^q} = \left(1 + \frac{p-q}{2}\right) S. \quad (35)$$

При $p = q$ из (35) получаем:

$$U_{2^p 2^q} = S,$$

т. е. при такой перестановке членов ряда (1), когда за 2^p положительными членами следует такое же число отрицательных членов, сумма ряда не изменяется.

§ 6. Формулы (13), (26 и (35), полученные совершенно элементарным путем, годны только для специальных случаев и являются частным случаем более общей формулы, позволяющей вычислить сумму ряда, полученного из ряда (1) путем такой перестановки его членов, когда за каждым p положительными членами следует q отрицательных членов. Для вывода этой формулы воспользуемся равенством:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + \rho_n, \quad (36)$$

где ρ_n — величина, стремящаяся к конечному пределу C при неограниченном возрастании n , а C — эйлерова постоянная (Гурса, т. I, стр. 108, изд. 1911 г.).

Рассмотрим ряд, полученный из ряда (1) путем такой перестановки его членов, когда за каждым p положительными членами следуют q отрицательных, т. е. ряд вида:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \dots - \frac{1}{2q} + \dots \quad (37)$$

Обозначим частную сумму ряда (37) через U_{pqn} . В таком случае

$$U_{pqn} = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{2pi - (2p-1)} + \frac{1}{2pi - (2p-3)} + \frac{1}{2pi - (2p-5)} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{1}{2pi-1} - \frac{1}{2qi-2(q-1)} - \frac{1}{2qi-2(q-2)} - \dots - \frac{1}{2qi} \right). \quad (38)$$

Прибавляя и вычитая в правой части равенства (38) группу членов вида:

$$\left(\frac{1}{2pi-2(p-1)} + \frac{1}{2pi-2(p-2)} + \frac{1}{2pi-2(p-3)} + \dots + \frac{1}{2pi} \right),$$

приведем (38) к такому виду:

$$\begin{aligned}
 U_{pqn} = & \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{2pi - (2p-1)} + \frac{1}{2pi - (2p-3)} + \dots + \frac{1}{2pi-1} - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2pi-2(p-1)} - \frac{1}{2pi-2(p-2)} - \dots - \frac{1}{2pi} \right) + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{pi - (p-1)} + \frac{1}{pi - (p-2)} + \frac{1}{pi - (p-3)} + \dots + \frac{1}{pi} \right) - \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{qi - (q-1)} + \frac{1}{qi - (q-2)} + \frac{1}{qi - (q-3)} + \dots + \frac{1}{qi} \right) \quad (39)
 \end{aligned}$$

или

$$U_{pqn} = S_n + \frac{1}{2} \sum_1 - \frac{1}{2} \sum_2, \quad (39')$$

где

$$\begin{aligned}
 S_n = & \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{2pi - (2p-1)} + \frac{1}{2pi - (2p-3)} + \dots + \frac{1}{2pi-1} - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2pi-2(p-1)} - \frac{1}{2pi-2(p-2)} - \dots - \frac{1}{2pi} \right), \\
 \sum_1 = & \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{pi - (p-1)} + \frac{1}{pi - (p-2)} + \frac{1}{pi - (p-3)} + \dots + \frac{1}{pi} \right)
 \end{aligned}$$

и

$$\sum_2 = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{qi - (q-1)} + \frac{1}{qi - (q-2)} + \frac{1}{qi - (q-3)} + \dots + \frac{1}{qi} \right),$$

причем в S_n каждая группа содержит равное число положительных и отрицательных членов.

Итак, в равенстве (39) S_n представляет собою частную сумму ряда (1), а \sum_1 и \sum_2 представляют частные суммы гармонического ряда, причем

$$\sum_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{np}, \quad (40)$$

$$\sum_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{nq}. \quad (41)$$

При помощи равенства (36) можно (40) и (41) написать в такой форме:

$$\sum_1 = \ln np + \rho_{np}, \quad (42)$$

$$\sum_2 = \ln nq + \rho_{nq}. \quad (43)$$

Таким образом равенство (39') может быть написано в виде:

$$U_{pqn} = S_n + \frac{1}{2} (\ln np + \rho_{np} - \ln nq - \rho_{nq}). \quad (44)$$

Отсюда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_{pqn} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q} + \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{np} - \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{nq}$$

или

$$U_{pq} = S + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{p}{q} \right), \quad (45)$$

где

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_{pqn} = U_{pq}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S = \ln 2; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{np} = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{nq} = C.$$

Формула (45) была выведена Омом (M. Ohm), в его сочинении «De nonnullis seriebus infinitis summandis». Antr. Programm. Berlin 1839, при помощи интегрального исчисления. Предлагаемый нами вывод не требует применения интегрального исчисления и основан исключительно на равенстве (36).

В заключение отметим, что формула Маннинга (Manning) (см. Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, т. I, стр. 35, изд. 1933 г.) является частным случаем формулы (45).

ОСТАТОЧНЫЙ ЧЛЕН ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА В ФОРМЕ Д'ОКАНЯ.

М. С. Б р и т м а н (Николаев, УССР).

Д'Окань (D'Ocagne) в статье, напечатанной в журнале «Mathesis» (вторая серия, т. I, 1891, стр. 19), доказывает формулу:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(6h)^n}{n!} [f^{(n)}(x_0 + h) - f^{(n)}(x_0)], \quad (1)$$

где $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $f(x)$ определена в интервале $(x_0, x_0 + h)$;
- 2) в этом интервале она имеет производные всех порядков от первого до $(n+1)$ -го порядка включительно;
- 3) производная $f^{(n+1)}(x)$ определенная, непрерывная и отличная от нуля в интервале $(x_0, x_0 + h)$.

Очевидно, формула (1) есть формула Тейлора с остаточным членом

$$\frac{(6h)^n}{n!} [f^{(n)}(x_0 + h) - f^{(n)}(x_0)]. \quad (2)$$

Мы сначала изложим вывод формулы (1), данный Д'Оканем, а затем выведем эту формулу другим способом.

Доказательство Д'Оканя. Обозначив через P постоянное число, удовлетворяющее уравнению:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - hf'(x_0) - \frac{h^2}{2!} f''(x_0) - \dots - \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) - P [f^{(n)}(x_0 + h) - f^{(n)}(x_0)] = 0, \quad (3)$$

рассмотрим функцию

$$F(x) = f(x_0 + h) - f(x) - (x_0 + h - x)f'(x) - \frac{(x_0 + h - x)^2}{2!}f''(x) - \dots \\ \dots - \frac{(x_0 + h - x)^n}{n!}f^{(n)}(x) - P[f^{(n)}(x_0 + h) - f^{(n)}(x)].$$

Легко сообразить, что $F(x_0) = 0$ и $F(x_0 + h) = 0$. Ввиду этого производная $F'(x)$ функции $F(x)$ обращается в нуль при некотором значении x , заключенном между x_0 и $x_0 + h$. Таким образом $F'(x_0 + \theta_1 h) = 0$, где $0 < \theta_1 < 1$.

Так как

$$F'(x) = -\frac{(x_0 + h - x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x) + P f^{(n+1)}(x) = \\ = f^{(n+1)}(x) \left[P - \frac{(x_0 + h - x)^n}{n!} \right]$$

и так как $f^{(n+1)}(x)$ не обращается в нуль в интервале $(x_0, x_0 + h)$, то

$$P - \frac{[x_0 + h - x_0 - \theta_1 h]^n}{n!} = 0,$$

откуда

$$P = \frac{[h(1 - \theta_1)]^n}{n!} = \frac{(\theta h)^n}{n!},$$

где $0 < \theta < 1$.

Подставив найденное значение P в равенство (3) и перенеся из левой части в правую все члены, кроме первого, получаем равенство (1).

Другой вывод формулы (1). Формулу (1) легко вывести из формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

С этой целью докажем сначала две леммы.

Лемма 1. Если производная $\varphi'(x)$ от данной функции $\varphi(x)$ определенная, непрерывная и не обращается в нуль в интервале $(x_0, x_0 + h)$, то

$$\frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0 + \theta h)}{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)} > 0$$

при $0 < \theta < 1$.

В самом деле, пользуясь теоремой Лагранжа о конечном приращении, находим:

$$\frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0 + \theta h)}{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)} = \frac{(1 - \theta)\varphi'(x_0 + \theta_2 h)}{\varphi'(x_0 + \theta_2 h)}.$$

Из упомянутых условий для $\varphi'(x)$ следует, что $\varphi'(x)$ сохраняет свой знак во всем интервале $(x_0, x_0 + h)$.

Теперь ясно, что

$$\frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0 + \theta h)}{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)} > 0.$$

Лемма II. Если $\varphi'(x)$ — определенная, непрерывная и не обращающаяся в нуль в интервале $(x_0, x_0 + h)$ производная от функции $\varphi(x)$, то при любом положительном и меньшем единицы значении θ

$$0 < \frac{\varphi(x_0 + \theta h) - \varphi(x_0)}{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)} < 1.$$

Действительно

$$\frac{\varphi(x_0 + \theta_1 h) - \varphi(x_0)}{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)} = \frac{\theta_1 \varphi'(x_0 + \theta_1 h)}{\varphi'(x_0 + \theta_2 h)},$$

где θ_1 и θ_2 удовлетворяют неравенствам $0 < \theta_1 < 1$, $0 < \theta_2 < 1$. Так как $\varphi'(x)$ сохраняет свой знак в интервале $(x_0, x_0 + h)$ и $\theta > 0$, то

$$\frac{\varphi(x_0 + \theta_1 h) - \varphi(x_0)}{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)} > 0.$$

Далее имеем:

$$1 - \frac{\varphi(x_0 + \theta_1 h) - \varphi(x_0)}{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)} = \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0 + \theta_1 h)}{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}.$$

Правая часть этого равенства на основании леммы I есть положительное число. Поэтому

$$\frac{\varphi(x_0 + \theta_1 h) - \varphi(x_0)}{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)} < 1.$$

Лемма доказана.

Напишем формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0 + \theta_1 h).$$

На основании леммы II имеем:

$$\frac{f^{(n)}(x_0 + \theta_1 h) - f^{(n)}(x_0)}{f^{(n)}(x_0 + h) - f^{(n)}(x_0)} = \theta_2,$$

где $0 < \theta_2 < 1$, откуда

$$f^{(n)}(x_0 + \theta_1 h) = f^{(n)}(x_0) + \theta_2 [f^{(n)}(x_0 + h) - f^{(n)}(x_0)],$$

или, полагая $\sqrt[n]{\theta_2} = \theta$:

$$f^{(n)}(x_0 + \theta_1 h) = f^{(n)}(x_0) + \theta^n [f^{(n)}(x_0 + h) - f^{(n)}(x_0)].$$

Формулу Тейлора мы можем написать теперь в следующем виде:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(\theta h)^n}{n!} [f^{(n)}(x_0 + h) - f^{(n)}(x_0)].$$

ОБ ОСТАТОЧНОМ ЧЛЕНЕ ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА.

М. С. Бритман (Николаев, УССР).

Число θ в остаточном члене

$$\frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x + \theta h)$$

формулы Тейлора

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots \\ &\dots + \frac{h^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-2)}(x) + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x + \theta h) \end{aligned} \quad (1)$$

обладает тем свойством, что при неизменном x

$$\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \sqrt[m+1]{\frac{(m+1)!}{n(n+1)(n+2)\dots(n+m)}},$$

где m есть число всех следующих за $(n-1)$ -й производных, обращающихся в нуль при рассматриваемом значении x , до первой из неравных нулю производных.

Докажем это свойство.

Первая по порядку из следующих за $(n-1)$ -й и не равных нулю, при данном значении x , производных есть производная $f^{(n+m)}(x)$. По формуле Тейлора имеем:

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots \\ &\dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + \frac{h^{n+m}}{(n+m)!} f^{(n+m)}(x + \theta_1 h). \end{aligned}$$

Вычтя это равенство из равенства (1), получим:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x + \theta h) - \\ &\quad - \frac{h^{n+m}}{(n+m)!} f^{(n+m)}(x + \theta_1 h), \end{aligned}$$

откуда

$$f^{(n-1)}(x + \theta h) - f^{(n-1)}(x) = \frac{h^{m+1}}{n(n+1)(n+2)\dots(n+m)} f^{(n+m)}(x + \theta_1 h). \quad (2)$$

Применяя формулу Тейлора к функции $f^{(n-1)}(x)$, имеем:

$$f^{(n-1)}(x + \theta h) = f^{(n-1)}(x) + \frac{(\theta h)^{m+1}}{(m+1)!} f^{(n+m)}(x + \theta_2 \theta h). \quad (3)$$

Из равенства (2) и (3) следует, что

$$\frac{(\theta h)^{m+1}}{(m+1)!} f^{(n+m)}(x + \theta_2 \theta h) = \frac{h^{m+1}}{n(n+1)(n+2)\dots(n+m)} f^{(n+m)}(x + \theta_1 h),$$

откуда

$$\theta^{m+1} = \frac{(m+1)!}{n(n+1)(n+2)\dots(n+m)} \cdot \frac{f^{(n+m)}(x + \theta_1 h)}{f^{(n+m)}(x + \theta_2 \theta h)};$$

следовательно,

$$\theta = \sqrt[m+1]{\frac{(m+1)!}{n(n+1)(n+2)\dots(n+m)} \frac{f^{(n+m)}(x + \theta_1 h)}{f^{(n+m)}(x + \theta_2 \theta h)}}.$$

Так как

$$\lim_{h \rightarrow 0} f^{(n+m)}(x + \theta_1 h) = \lim_{h \rightarrow 0} f^{(n+m)}(x + \theta_2 \theta h) = f^{(n+m)}(x),$$

причем согласно условию $f^{(n+m)}(x) \neq 0$, то

$$\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \sqrt{\frac{(m+1)!}{n(n+1)(n+2)\dots(n+m)}}.$$

Интересен тот случай, когда $f^{(n)}(x) \neq 0$. В этом случае $m = 0$; поэтому $\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{n}$.

О НЕКОТОРЫХ ПРОСТЫХ ПО ФОРМЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ ВЕСЬМА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА.

М. Л. Франк (Ленинград).

I В некоторых случаях кривые, соответствующие в декартовых координатах функциям весьма высокого порядка, имеют замечательно простой вид. Пользуясь несколькими такими функциями, можно получать уравнения разнообразных кривых путем простых преобразований или комбинаций этих функций.

В дальнейшем будем считать число m всегда большим и для конкретности примем $m \geq 1000$. В тех случаях, когда нам придется отличать четное m от нечетного, будем полагать $m = 2n$ или $m = 2n + 1$ и считать $n \geq 500$.

Параболы высокого порядка.

$$y = x^{2n}, \quad (1)$$

$$y = x^{2n+1}. \quad (2)$$

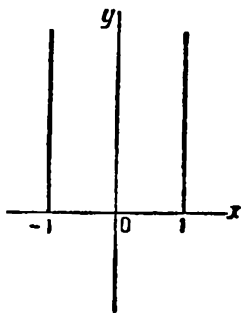
Первая кривая, как нетрудно видеть (фиг. 1), представляет собою почти точно ломаную, состоящую из трех частей: двух почти точно параллельных оси Y и направленных в положительную сторону полупрямых и отрезка, почти совпадающего с осью X в интервале $-1 < x < +1$.

Насколько точно такая кривая может считаться ломаной, нетрудно подсчитать.

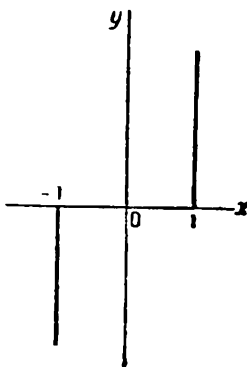
Принимая $2n = 1000$, получим при $|x| < 0,99$, $y < 0,000044$ и даже при $|x| = 0,995$, $y \approx 0,0068$. Таким образом для $-0,99 < x < +0,99$ даже при очень крупном масштабе чертежа, например $1 = 100$ мм, и при самом точном черчении кривая будет сливаться вполне с осью X .

Дальше, при $0,99 < x < 1$, конечно, не получится точный прямой угол. Здесь будет маленькое закругление, еле заметное даже при большом масштабе; так, при $x = 0,995$, т. е. для точки, отстоящей при масштабе $1 = 100$ мм на $0,5$ мм от точки $x = 1$, высота y будет только немного превышать $0,5$ мм. При $|x| = 1$, $y = 1$, но стоит x

взять немного больше единицы, чтобы y оказалось чрезвычайно большим. Так, например, для $|x| = 1,005$, $y \approx 164$, т. е. при избранном нами масштабе отклонение x на 0,5 мм от единицы дает $y = 16$ м, т. е. не уместится ни на каком чертеже. В пределах чертежа можно считать, что идущие вверх ветви кривой почти точно совпадают с прямыми, параллельными оси Y .



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Не повторяя вычислений, очевидно, что для нечетного $m = 2n + 1$ кривая (2) будет иметь вид, представленный на фиг. 2.

Производные кривые, образованные с помощью парабол $y = x^m$.

Как известно, проективное преобразование, получаемое с помощью подстановки:

$$x = \frac{a_1x_1 + b_1y_1 + c_1}{a_3x_1 + b_3y_1 + c_3}, \quad y = \frac{a_2x_1 + b_2y_1 + c_2}{a_3x_1 + b_3y_1 + c_3},$$

преобразует прямые линии снова в прямые и, следовательно, почти точно прямые также в почти точно прямые. Мы можем с помощью такого преобразования при соответствующем выборе коэффициентов преобразования получить различные другие кривые.

Возьмем простейший случай аффинного преобразования при $a_3 = b_3 = 0$, $c_3 = 1$, при котором параллельные прямые сохраняют свою параллельность. Так, например, взяв

$$x = \frac{x_1}{a}, \quad y = y_1,$$

получим:

$$y_1 = \left(\frac{x_1}{a}\right)^m, \quad (3)$$

и в этом случае кривые будут почти сливаться с осью X на участке $-a < x < a$, а в остальном не будут отличаться от кривых (1) и (2).

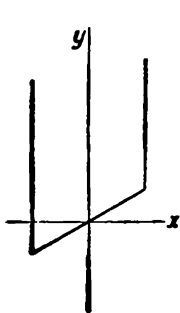
Если взять

$$x = \frac{x_1}{a}, \quad y = y_1 - kx_1,$$

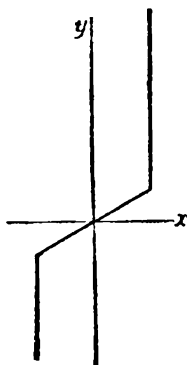
то получим:

$$y_1 = \left(\frac{x_1}{a}\right)^m + kx_1. \quad (4)$$

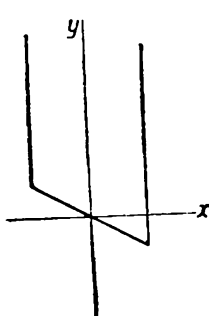
На участке $-a < x < a$ кривые будут почти точно сливаться с прямой $y_1 = kx_1$; за пределами этого участка кривые будут снова почти точно вертикальными (фиг. 3, 4, 5, 6).



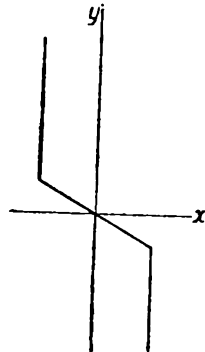
Фиг. 3.



Фиг. 4.



Фиг. 5.



Фиг. 6.

Если произвести поворот кривых (1) и (2), например на угол -45° , то соответствующее преобразование будет:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} (x_1 - y_1); \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2} (x_1 + y_1), \quad (5)$$

и мы получим уравнение:

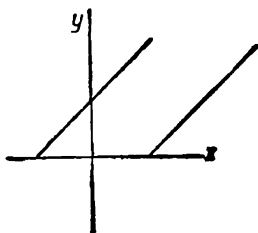
$$\frac{x_1 + y_1}{\sqrt{2}} = \left(\frac{x_1 - y_1}{\sqrt{2}}\right)^m. \quad (6)$$

Если то же преобразование применить к уравнению (4) и принять $k = 1$, то получим уравнение:

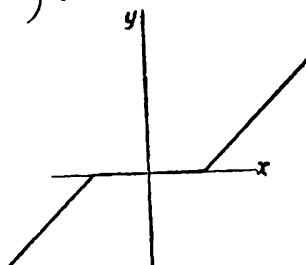
$$\sqrt{2}y = \left(\frac{x-y}{a\sqrt{2}}\right)^m$$

или, заменив $2^{\frac{m+1}{2}} \cdot a = b$:

$$y = \left(\frac{x-y}{b}\right)^m. \quad (7)$$



Фиг. 7.



Фиг. 8.

При $m = 2n$ и $m = 2n + 1$ получим кривые, изображенные на фиг. 7 и 8.

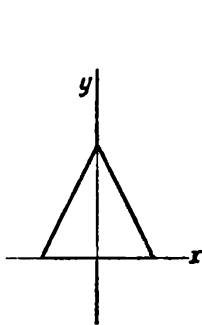
Воспользуемся теперь простым перспективным преобразованием, а именно:

$$x = \frac{hx_1}{h - y_1}, \quad y = \frac{y_1}{h - y_1}. \quad (8)$$

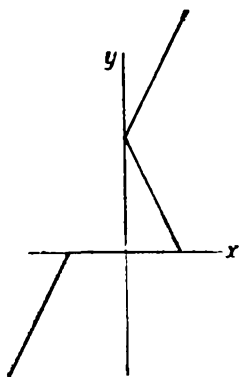
Нетрудно видеть, что при этом ось X преобразуется в ось X_1 , а прямые $x = \pm 1$ преобразуются в прямые $\pm \frac{x_1}{1} + \frac{y_1}{h} - 1 = 0$, пересекающие ось Y в точке $y = h$, а ось X в точках $x = \pm 1$. Уравнения (1) и (2) дадут:

$$\frac{y_1}{h - y_1} = \left(\frac{hx_1}{h - y_1} \right)^m. \quad (9)$$

Так как точка $x_1 = 0, y_1 = h$ соответствует $y = \infty$, то при $m = 2n$ полупрямые $x = \pm 1, y > 0$ преобразуются в отрезки, которые



Фиг. 9.



Фиг. 10.

будут боковыми сторонами равнобедренного треугольника (фиг. 9), а в случае $m = 2n + 1$ полупрямая $x = -1, y < 0$ преобразуется в две полупрямые, как показано на фиг. 10. Само собою разумеется, что при другом выборе перспективного преобразования точка, соответствующая бесконечно удаленной точке параллельных прямых, могла бы оказаться в любой точке плоскости.

Любопытные кривые появляются, если воспользо-

ваться введением в качестве множителя в некоторые простые уравнения величины

$$z = 1 - \left(\frac{x}{a} \right)^{2n}. \quad (10)$$

Эта величина почти точно равна единице при $|x| < a$, точно равна нулю при $|x| = a$ и представляет собою большую по абсолютному значению отрицательную величину при $|x| > a$.

Возьмем, например, уравнение

$$y^2 = h^2,$$

представляющее собою пару прямых, параллельных оси X , и умножим правую часть на z ; мы получим:

$$y^2 = h^2 \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^{2n} \right]. \quad (11)$$

В интервале $-a < x < a$ мы получаем почти точно те же две параллельные прямые. При $x = \pm a, y = 0$, а при $|x| > a$ y становится мнимым. Соответствующая кривая будет почти точно прямоугольником со сторонами $2a$ и $2h$ (фиг. 11).

Само собою разумеется, что с помощью аффинного и перспективного преобразований можно получить почти параллелограм или почти точно произвольный четырехугольник.

Возьмем еще пару прямых:

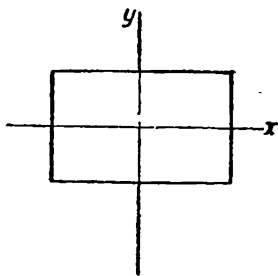
$$\left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left(\frac{x}{a} + 1\right)^2.$$

Обе эти прямые проходят через точку $x = -a$; $y = 0$ симметрично относительно оси X , причем отсекают на оси Y отрезки $\pm b$.

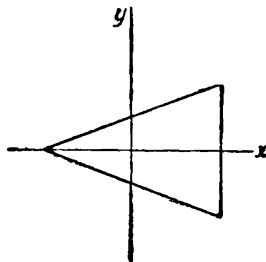
Умножим правую часть на z :

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left(\frac{x}{a} + 1\right)^2 \left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{2n}\right]. \quad (12)$$

Очевидно опять, что для $|x| < a$ мы получим почти ту же пару прямых. При $x = a$ мы получим почти вертикальный отрезок, а при $|x| > a$ y будет мнимым. Таким образом соответствующая кривая окажется почти точно равнобедренным треугольником с основанием $4b$ и высотой $2a$ (фиг. 12).



Фиг. 11.



Фиг. 12.

Перспективным преобразованием можно эту кривую преобразовать в почти точный треугольник произвольной формы.

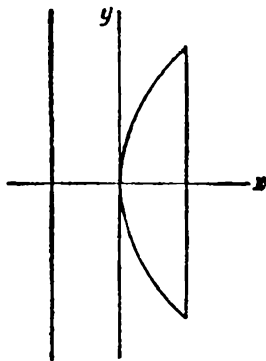
Приведем еще один пример. Возьмем параболу

$$y^2 = 2px$$

и построим с ее помощью уравнение:

$$y^2 = 2px \left[1 - \left(\frac{2x}{p}\right)^{2n}\right]. \quad (13)$$

При $0 < x < \frac{p}{2}$ мы получаем почти точно дугу параболы, замкнутую при $x = \frac{p}{2}$ почти точно хордой. При $x > \frac{p}{2}$ y получает мнимые значения. При $0 > x > -\frac{p}{2}$ y имеет мнимые значения, и при $x \approx -\frac{p}{2}$ получаем почти точно вертикальную прямую — директрису параболы (фиг. 13).

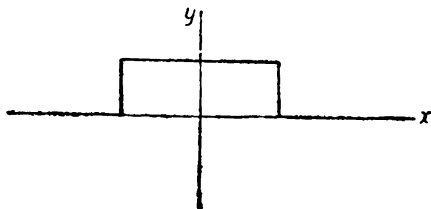


Фиг. 13.

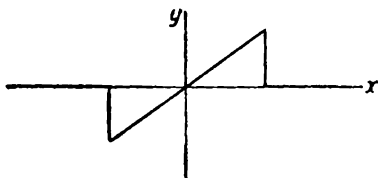
II. Другими видами исходных кривых могут служить кривые дробных функций, в частности функция:

$$y = \frac{h}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^{2n}}. \quad (14)$$

Функция эта почти точно равна h при $|x| < a$ и почти точно равна нулю при $|x| > a$. Кривая, соответствующая ей, представляет собою почти точно ломаную, состоящую из пяти отрезков (фиг. 14).



Фиг. 14.



Фиг. 15.

Комбинируя это уравнение с другими простыми уравнениями, получаем различные виды кривых.

Так, например, уравнение

$$y = x \frac{h}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^{2n}} \quad (15)$$

дает кривую, изображенную на фиг. 15.

Возьмем уравнение окружности

$$y^2 = r^2 - x^2.$$

Из него мы можем получить:

$$y^2 = r^2 - x^2 - \frac{h^2}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^{2n}}. \quad (16)$$

Положим $h^2 + a^2 < r^2$ и, следовательно, $h < r$, $a < r$. Тогда для $|x| < a$ уравнению (16) соответствуют почти точно дуги окружности:

$$x^2 + y^2 = r^2 - h^2,$$

радиус которой равен $\sqrt{r^2 - h^2}$.

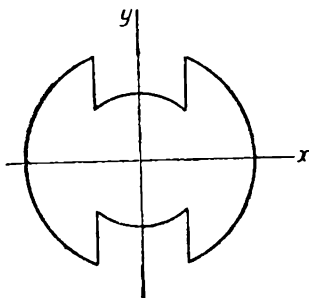
При $a < |x| < r$ значение последнего члена ничтожно мало, и мы получаем почти точно дуги основной окружности радиуса r . При $|x| < r$ вещественных значений для y нет.

Кривая показана на фиг. 16.

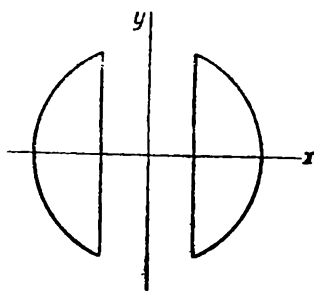
При $h \geq r$, $a < r$ на отрезке $|x| < a$ y получает мнимые значения и при $a < |x| < r$; остаются два почти круговых сегмента, замкнутые их хордами (фиг. 17).

При $h < r$, $a > r$ получается почти точно окружность радиуса $r_1 = \sqrt{r^2 - h^2}$.

Любопытным является случай $h < r$, $a < r$, но $h^2 + a^2 > r^2$. В этом случае на отрезке $|x| < \sqrt{r^2 - h^2}$ получается почти точно окружность радиуса $r_1 = \sqrt{r^2 - h^2}$. Далее на участке $\sqrt{r^2 - h^2} < |x| < a$ y имеет мнимые значения, и, наконец, при $a < |x| < r$ получаются снова почти круговые сегменты (фиг. 18).



Фиг. 16.



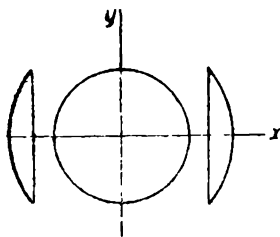
Фиг. 17.

Возьмем теперь выражение вида (14) не в качестве слагаемого, а множителя.

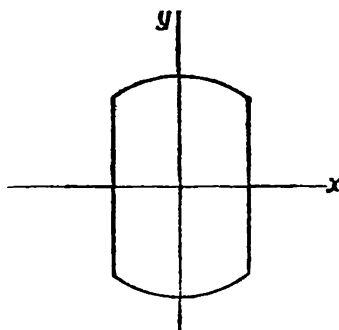
Мы можем, например, получить:

$$y^2 = (r^2 - x^2) \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^{2n}}. \quad (17)$$

При $a < r$ этому уравнению соответствует кривая, показанная на фиг. 19.



Фиг. 18.



Фиг. 19.

III. Уравнение (11), как было показано, соответствует кривой, весьма близкой по форме к прямоугольнику.

Такого же рода кривую можно получить с помощью уравнения:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2n} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2n} = 1. \quad (18)$$

В самом деле, при $|x| < a$ слагаемое $\left(\frac{x}{a}\right)^{2n}$ близко к нулю и, следовательно, $\frac{y}{b} \approx 1$ и, обратно, при $y < b$, $\frac{x}{a} \approx 1$.

При $a = b$ получаем:

$$x^{2n} + y^{2n} = a^{2n},$$

кривую, весьма близкую к квадрату. Возьмем $a = 1$; $2n = 1000$; тогда при $x = 0,999$

$$y = (1 - 0,999^{1000})^{\frac{1}{1000}} \approx 0,9995.$$

Таким образом, если x всего на 0,001 меньше единицы, y отличается от единицы меньше, чем на 0,0005. Чтобы определить величины закруглений углов, найдем расстояние от начала координат до точки пересечения кривой с прямой $y = x$. Для точного квадрата половина диагонали была бы равна $\sqrt{2} \approx 1,4142$.

Из уравнения нашей кривой

$$x^{2n} + y^{2n} = 1 \quad (19)$$

при $x = y$ получаем:

$$2x^{2n} = 1,$$

откуда

$$x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} = 2^{-\frac{1}{2n}},$$

и искомая длина равна:

$$\frac{1}{2} d = x\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{n})};$$

при $n = 500$

$$\frac{1}{2} d = 2^{0,5 \cdot 0,998} = 2^{0,499} \approx 1,4132.$$

Таким образом отрезок этот отличается от половины диагонали всего на 0,001.

Если повернуть кривую (19) на -45° , то получим фиг. 20:

$$\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^{2n} + \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^{2n} = 1. \quad (20)$$

Изменим теперь масштаб для x и y , поставив в последнее уравнение вместо x : $\frac{x\sqrt{2}}{a}$ и вместо y : $\frac{y\sqrt{2}}{b}$.

Тогда получим уравнение:

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^{2n} + \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^{2n} = 1, \quad (21)$$

которому соответствует кривая, весьма близкая к ромбу с диагоналями $2a$ и $2b$ (фиг. 21).

Кривая

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2n+1} = 1 \quad (22)$$

изображена на фиг. 22. В интервалах $|x| > a$ кривая эта весьма близка к прямой $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$. В самом деле, из уравнения (22) следует:

$$\frac{y}{b} = \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^{2n+1} \right]^{\frac{1}{2n+1}} \quad (23)$$

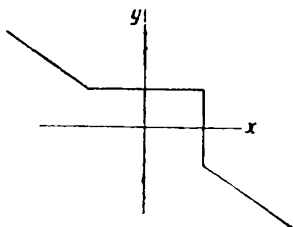
или

$$\frac{y}{b} = -\frac{x}{a} \left[1 - \left(\frac{a}{x} \right)^{2n+1} \right]^{\frac{1}{2n+1}}, \quad (24)$$

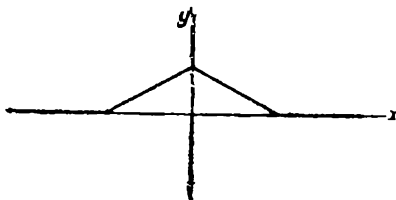
но при $x > a$, $\left(\frac{a}{x} \right)^{2n+1}$ весьма близко к нулю, а корень степени $2n+1$ из числа, близкого к единице, еще меньше отличается от единицы. Таким образом

$$\frac{y}{b} \approx -\frac{x}{a}.$$

Наоборот, при $|x| < a$, как следует из (23), $\frac{y}{b} \approx 1$, $y \approx b$ и точно так же при $|y| < b$, $x \approx a$.



Фиг. 22.



Фиг. 23.

Если принять $a = b = 1$, получим:

$$x^{2n+1} + y^{2n+1} = 1. \quad (25)$$

Повернем теперь кривую на $+45^\circ$. Мы получим уравнение:

$$\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}} \right)^{2n+1} - \left(\frac{x-y}{\sqrt{2}} \right)^{2n+1} = 1. \quad (26)$$

Если теперь заменить x и y на $\frac{x\sqrt{2}}{a}$ и $\frac{y\sqrt{2}}{b}$, получим:

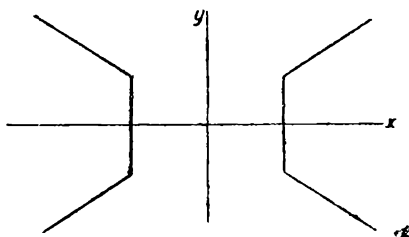
$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^{2n+1} - \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)^{2n+1} = 1. \quad (27)$$

Соответствующая кривая изображена на фиг. 23. Она представляет собою почти точно ломаную, сливающуюся с осью x для $|x| > a$ и образующую угол с вершиною на оси y в точке $y = b$.

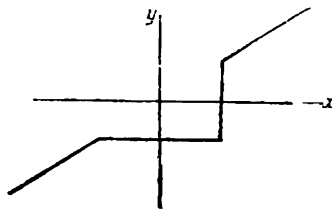
IV. Кривая, аналогичная гиперболе, имеет уравнение:

$$\left(\frac{x}{a} \right)^{2n} - \left(\frac{y}{b} \right)^{2n} = 1. \quad (28)$$

На участках $|x| > a$ она почти точно сливается с асимптотами гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и при $|x| \approx a$ почти точно идет параллельно оси y (фиг. 24).



Фиг. 24.



Фиг. 25.

{ При m нечетном получаем:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1} - \left(\frac{y}{b}\right)^{2n+1} = 1. \quad (29)$$

Кривая (фиг. 25) имеет тот же вид, что и кривая (22) (фиг. 22), но иначе расположена.

Кроме приведенных здесь типов кривых можно, конечно, получить еще множество других.

ОБ ИЗМЕНЕНИИ ФОРМЫ И РАСПОЛОЖЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ КРИВОЙ В СВЯЗИ С ИЗМЕНЕНИЕМ ПАРАМЕТРОВ, ВХОДЯЩИХ В ЕЕ УРАВНЕНИЕ.

(Предельные случаи распадаения.)

Ф. С. Рябоконт (Харьков).

Если задать кривую ее уравнением в общем виде с буквенными коэффициентами, то, как известно, форма и расположение кривой будут неопределенными до тех пор, пока будут неопределенными коэффициенты, входящие в ее уравнение. Всех коэффициентов в уравнении кривой n -го порядка в общем виде будет $\frac{n(n+3)}{2} + 1$; число их отношений к одному из коэффициентов, не равному нулю, будет $\frac{n(n+3)}{2}$.

Если же все коэффициенты в уравнении кривой заданы, то ее форма и расположение будут вполне определенными, т. е. не существует другой кривой с теми же коэффициентами, отличающейся от данной кривой.

Коэффициенты можно задать непосредственно или же, если задать их нельзя, то иногда можно так описать кривую, так выделить ее среди других кривых, указать такие ее особенности, что можно, на основании этих особенностей, все коэффициенты кривой

вычислить. Описать кривую линию, выделить ее среди других линий, заданных тем же уравнением в общем виде, можно разными способами, но наиболее простой из них — это указать $\frac{n(n+3)}{2}$ точек, через которые кривая должна проходить. Подставляя по очереди координаты каждой из этих точек в уравнение кривой в общем виде, мы таким образом составим $\frac{n(n+3)}{2}$ уравнений с $\frac{n(n+3)}{2}$ неизвестными отношениями коэффициентов кривой и, решив эту систему, найдем отношения коэффициентов и, значит, определим кривую.

Часто бывает удобно для исследования каких-нибудь свойств или особенностей кривой задать все ее коэффициенты кроме нескольких, одного или двух, и при помощи этих неопределенных коэффициентов, изменяя их по нашему усмотрению, исследовать интересующие нас свойства кривой. В этой статье мы и думаем показать на отдельных примерах, как можно производить такого рода исследования.

Простейшей линией является прямая линия. Ее уравнение

$$Ax + By + C = 0$$

содержит три произвольных коэффициента или два отношения этих коэффициентов. Конечно, эти коэффициенты не влияют на „форму“ прямой, но зато они влияют на ее расположение. Так, если в уравнении прямой изменять A и B , оставляя C постоянным, то прямая будет или только изменять свое направление, или же, если одновременно увеличивать A и B , прямая будет приближаться к началу координат, а при уменьшении A и B — удаляться от начала. Этот чрезвычайно важный факт используют при изучении свойства поляра относительно кривых второго порядка. В самом деле, в уравнении поляры вместо A и B входят функции координат полюса, и если полюс взять на кривой, то поляра является касательной; поляра полюса, взятого вне кривой, будет пересекать кривую, а поляра полюса, взятого внутри кривой, не будет пересекать ее, потому что это равносильно уменьшению или увеличению A и B по сравнению с тем моментом, когда прямая была касательной.

Уравнение круга $(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$ содержит три произвольных параметра a , b и r . Изменяя r , мы меняем величину круга, а изменяя a и b — его расположение относительно системы координат. При этом, если a и b изменять произвольно, то круг будет произвольно менять свое положение; в частности можно заставить центр круга перемещаться по какой угодно кривой. Так, если a и b изменять таким образом, чтобы $ha + kb + l = 0$, где h , k и l — постоянные числа, то центр круга опишет прямую линию. Выбор этой линии в свою очередь зависит от выбора h , k и l . Если a и b изменять так, чтобы $\frac{a^2}{k^2} + \frac{b^2}{l^2} = 1$ при k и l посто-

янных, то центр круга будет перемещаться по эллипсу; при $\frac{a^2}{k^2} - \frac{b^2}{l^2} = 1$ — по гиперболе и т. д. При этом выбор соответствующего эллипса или гиперболы в свою очередь зависит от выбора k и l .

Уравнение эллипса в каноническом виде:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

содержит два произвольных параметра a и b . От этих параметров зависит форма эллипса. Чтобы видеть, как изменяется форма эллипса от изменения этих параметров, напишем уравнение кривой в таком виде:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2\lambda} = 1.$$

Здесь a задано, а λ — произвольный параметр. При $\lambda > 0$ это уравнение дает уравнение эллипса, при $\lambda < 0$ — уравнение гиперболы.

Изменяя λ , оставляя его положительным, мы получим семейство эллипсов, имеющих общую ось и общие вершины на оси x -ов. При $\lambda = 0$ мы получим пару прямых, совпавших с осью x -ов; если λ возрастает, оставаясь меньше единицы, то фокусы эллипса будут лежать на оси x -ов. При $\lambda = 1$ получим круг, а при $\lambda > 1$ опять эллипс, но фокусы этого эллипса уже будут лежать на оси y -ов. При $\lambda \rightarrow \infty$ эллипс будет растягиваться вдоль оси y -ов, и при $\lambda = \infty$ он выродится в пару прямых, параллельных оси y -ов. При таком изменении эллипса только две его точки, вершины эллипса на оси x -ов, остаются постоянными.

Если $\lambda \rightarrow 0$, то эллипс становится чрезвычайно узким, превращается в два отрезка, равных $2a$, а при $\lambda = 0$ переходит в ось x -ов, дважды ее покрывая. При $\lambda < 0$, но очень близком к нулю мы будем иметь гиперболу, ветви которой очень близко подходят к оси x -ов; если теперь λ будет оставаться отрицательным и расти по абсолютному значению, то ветви гиперболы будут выправляться, все время удаляясь от оси x -ов. При $\lambda = -\infty$ гипербола вырождается в пару прямых, параллельных оси y -ов, уравнение которых $x = \pm a$, а при $\lambda = 0$ — в пару прямых, совпадающих с осью x -ов, уравнение которых $y^2 = 0$. Вершины гиперболы совпадают с вершинами эллипса и при изменении гиперболы остаются постоянными. При таком рассмотрении кажется, что если λ приближается к нулю, оставаясь положительным, то кривая дважды покрывает ось x -ов и как будто только между вершинами эллипса, если же λ стремится к нулю, оставаясь отрицательным, то она покрывает ось x -ов дважды и как будто только вне вершин кривой.

На самом же деле кривая и в первом и во втором случаях покрывает всю ось x -ов дважды, потому что ее уравнение переходит в уравнение $y^2 = 0$ как в первом, так и во втором случае.

Только две точки кривой при любом изменении λ остаются постоянными.

Если написать уравнение кривой второго порядка в более общем виде и потом изменять его коэффициенты, то можно заставить изменяться не только форму кривой, но и ее расположение.

Более интересные и разнообразные случаи изменения формы кривой дают кривые высших порядков при изменении коэффициентов их уравнений.

Рассмотрим полукубическую параболу:

$$y^2 = \lambda x^3. \quad (1)$$

Кривая третьего порядка вообще должна иметь $\frac{3(3+3)}{2} = 9$ независимых произвольных отношений коэффициентов. Но у полукубической параболы 9 из них равны нулю, один равен λ . Посмотрим, как изменяется форма этой кривой от изменения коэффициента λ . При $\lambda > 0$ кривая имеет форму и расположение, показанные на фиг. 1. В начале координат она имеет так называемую точку возврата первого рода. Если $\lambda \rightarrow 0$, то ветви кривой приближаются к оси x -ов и при $\lambda = 0$ совпадают с осью x -ов, дважды ее покрывая (и здесь как будто только положительную сторону). При λ , возрастающем от 0 до ∞ , ветви кривой приближаются к оси y -ов и при $\lambda = \infty$ трижды ее покрывают всю как в положительном, так и в отрицательном направлении. Чрезвычайно интересно показать, каким образом ветви кривой при $\lambda = \infty$ трижды покрывают ось y -ов. Как это могло случиться, когда для простого наблюдения кажется, что кривая должна только однажды совпасть с осью y -ов?

Чтобы ответить на этот вопрос, введем еще один параметр в наше уравнение, т. е. напомним это уравнение в таком виде:

$$y^2 = \lambda x^3 + \delta. \quad (2)$$

Сначала сравним кривую (1) с кривой (2). Для этого найдем точки пересечения этих кривых. Подставим во (2) из (1) вместо y^2 его значение. Имеем:

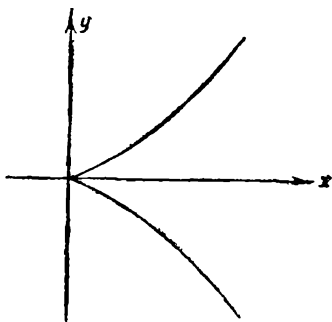
$$\lambda x^3 = \lambda x^3 + \delta.$$

Это равенство возможно только при $\delta = 0$, и, значит, при всяком $\delta \neq 0$ кривые (1) и (2) не имеют общих точек. Но при достаточно малом δ кривая (2) как угодно близко приближается к кривой (1). Исследуя кривую (2), мы видим, что она пересекает каждую из прямых $y = \pm \sqrt[3]{\delta}$ в трех совпавших точках. В самом деле, при $y = \pm \sqrt[3]{\delta}$ уравнение (2) дает:

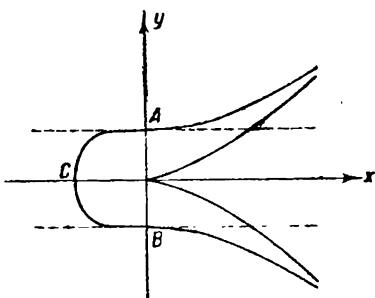
$$\delta = \lambda x^3 + \delta, \text{ т. е. } x^3 = 0.$$

Это показывает, что кривая на оси y -ов, на расстоянии $\pm \sqrt[3]{\delta}$ от начала координат имеет так называемые точки перегиба. Ось x -ов кривая (2) пересекает только в одной точке, потому что при $y = 0$, $x^3 = -\frac{\delta}{\lambda}$; отсюда x имеет только одно действительное значение. Следовательно, кривая (2) имеет такую форму, как показано на фиг. 2. У нее нет точки возврата первого рода.

Если $\lambda \rightarrow 0$, то точка C удаляется по оси x -ов как угодно далеко. Точки A и B при этом остаются постоянными. При $\lambda = 0$ кривая вырождается в две прямых: $y = \pm \sqrt{\delta}$. Если теперь $\delta \rightarrow 0$, то две прямых $y = \pm \sqrt{\delta}$ будут приближаться к оси x -ов и при $\delta = 0$ совпадают с ней. Поэтому становится ясным, почему при $\lambda = 0$ кривая (1) вырождается в две прямых — удвоенную ось x -ов.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Чтобы теперь понять, каким образом кривая (1) при $\lambda = \infty$ вырождается в три прямых, совпадающих с осью y -ов, введем в уравнение (2) еще один параметр e . Напишем уравнение (2) в таком виде:

$$y^2 = \lambda x (x^2 - e^2) + \delta, \quad (3)$$

или

$$(y + \sqrt{\delta})(y - \sqrt{\delta}) = \lambda x (x^2 - e^2). \quad (3')$$

Тогда, во-первых, замечаем, что кривая (3) с (1) пересекаются в двух точках, имеющих общую абсциссу, равную $\frac{\delta}{\lambda e^2}$. [Достаточно решить уравнение (1) совместно с (3).] Так же видно, что при $\lambda \rightarrow 0$ кривая (3) вырождается в две прямых $y = \pm \sqrt{\delta}$, а при $\lambda \rightarrow \infty$ кривая переходит в три прямых: $x = 0$ и $x = \pm e$. Если же $e \rightarrow 0$, то прямые $x = \pm e$ приближаются к оси y -ов, а при $e = 0$ совпадают с нею. Отсюда становится ясным, каким образом кривая (1) при $\lambda = \infty$ вырождается в три прямых, совпадающих с осью y -ов.

Чтобы можно было исследовать, какую форму имеет кривая при промежуточных значениях λ , лежащих между 0 и ∞ , введем понятие пучка кривых.

Пусть мы имеем кривые

$$\Phi = 0 \quad (a)$$

и

$$\Psi = 0, \quad (b)$$

тогда кривая

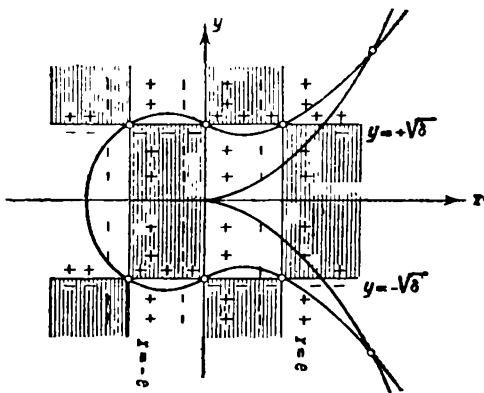
$$\Phi - k\Psi = 0 \quad (c)$$

будет проходить через точки пересечения первых двух кривых при всяком k и потому уравнение (c) называется уравнением пучка кривых. Каждая кривая пучка $\Phi - k\Psi = 0$, пройдя через

точки пересечения кривой $\Phi = 0$ и $\Psi = 0$, расположатся в той части плоскости, ограниченной кривыми (а) и (б), в какой $\Phi = k$. Если $k > 0$, то только в той части, где Φ и Ψ имеют одинаковые знаки, а при $k < 0$ — только в той, где Φ и Ψ имеют разные знаки.

В нашем случае за Φ можно взять кривую $y^2 - \delta = 0$, а за Ψ можно взять кривую $\lambda x(x^2 - e^2) = 0$.

Тогда кривая (3) проходит через точки пересечения двух кривых: кривой $y^2 - \delta = 0$ и кривой $\lambda x(x^2 - e^2) = 0$. Точки же пересечения этих кривых сейчас же видно, потому что эти кривые в свою очередь распадаются на прямые линии, первая — на прямые $y = \pm \sqrt{\delta}$, а вторая — на прямые $x = 0$ и $x = \pm e$. Поэтому кривая (3) пройдет через 6 точек пересечения вышеуказанных прямых и будет иметь форму, как показано на фиг. 3. На этой фигуре 6 точек пересечения прямых обведены кружочками. В заштрихованных областях кривой быть не может при $\lambda > 0$, потому что для каждой точки такой области



Фиг. 3.

$\Phi \equiv y^2 - \delta$ и $\Psi \equiv \lambda x(x^2 - e^2)$

имеют разные знаки; в областях же не заштрихованных кривая пройдет, потому что для каждой точки такой области Φ и Ψ будут иметь одинаковые знаки. Это нетрудно проверить, поставив знаки для каждой прямой, как показано на фиг. 3.

Если теперь $\lambda \rightarrow -\infty$, то точки, обведенные на чертеже кружочками, останутся постоянными [потому что кривая (3) будет проходить через эти точки при всяком λ], а точка С будет все время удаляться влево от начала координат. В самом деле, при достаточно малом значении λ можно брать достаточно большое по абсолютному значению и отрицательное x , чтобы в уравнении

$$y^2 = \lambda x(x^2 - e^2) + \delta$$

y было вещественным.

Отчего появляются впадины на кривой и есть ли они на ней в самом деле? Рассматривая более подробно уравнение (3), видим, что при $x = 0$, независимо от λ , $y = \pm \sqrt{\delta}$. Далее при увеличении x выражение, стоящее в скобках, некоторое время будет отрицательным (пока $0 < x < e$), поэтому здесь, в этом интервале, y по абсолютному значению будет меньше $\sqrt{\delta}$. Поэтому кривая, пере-

секши ось y -ов и уходя вправо, сначала будет приближаться к оси x -ов, а потом, при $x = \pm \frac{e}{\sqrt{3}}$ начнет удаляться от нее [при $x = \pm \frac{e}{\sqrt{3}}$ выражение $\lambda x(x^2 - e^2)$ будет иметь extremum]. При $x = e$ кривая пройдет через точку $(e, \pm \sqrt{\delta})$ и начнет быстро удаляться от оси x -ов по обе стороны.

Если же x изменять в интервале $(-e, 0)$, то выражение в скобках будет отрицательным, а выражение $\lambda x(x^2 - e^2)$ — положительным. Поэтому кривая, пройдя ось y -ов влево, сначала будет удаляться от оси x -ов, а потом (при $x = -\frac{e}{\sqrt{3}}$) опять приближаться к ней. При $x = -e$ кривая пройдет через точку $(-e, \pm \sqrt{\delta})$ и круто опустится на ось x -ов.

Итак, впадины в кривой будут и будут тем больше, чем больше по абсолютному значению будет λ (в некотором интервале), при $\lambda = 0$ впадин вовсе не бывает.

Что произойдет с впадинами, если λ будет увеличиваться дальше известного предела?

Уравнение (3) показывает, что с увеличением λ впадины, как находящиеся вправо, так и находящиеся влево от оси y -ов, начинают быстро расти, а ветви кривой, пройдя через точки $(e, \pm \sqrt{\delta})$, начинают при этом быстро удаляться от оси x -ов. Очевидно, что при этом наступит момент, когда впадина, находящаяся выше оси x -ов и находящаяся ниже ее, коснутся друг друга. Это будет при $\lambda = \frac{3 \cdot \sqrt{3}\delta}{2e^3}$. (Условие того, что уравнение третьей степени имеет кратные корни.)

Тогда кривая будет иметь такой вид, как показано на фиг. 4. У нее появится так называемая узловая точка.

Если λ увеличивать и дальше, то настанет момент, когда $\lambda x(x^2 - e^2) + \delta$ будет меньше нуля, потому что в интервале $(0, e)$, $x^2 - e^2 < 0$ и можно подобрать λ такое, при котором $|\lambda x(x^2 - e^2)| > \delta$. Для таких значений λ , y будет мнимым, и потому кривая распадется на две отдельных ветви, но будет проходить через прежние 6 постоянных точек. Форму она при этом будет иметь такую, как показано пунктиром на фиг. 4. Узловая точка кривой пропадет, зато у нее появится замкнутый овал.

При дальнейшем увеличении λ овал начнет растягиваться параллельно оси y -ов, а бесконечная ветвь кривой — выпрямляться, и при $\lambda = \infty$ овал вырождается в две прямых: $x = -e$ и $x = 0$, а ветвь — в прямую $x = e$. Если теперь $e \rightarrow 0$, то все три прямые сольются в одну и совпадут с осью y -ов.

Вот каким образом кривая $y^2 = \lambda x^3$ при $\lambda = \infty$ переходит в три прямых, совпадающих с осью y -ов.

При $\delta = 0$ кривая (3) всегда распадается на овал и отдельную ветвь, а кривая (2) переходит в кривую (1).

Если x будет меняться в интервале $(0, e)$, то в уравнении (3) y будет все время мнимым при $\delta = 0$.

Но овал располагается между осью y -ов и прямой $x = -e$, а ветвь касается прямой $x = e$ в точке пересечения ее осью x -ов. Кривая $y^2 = \lambda x(x^2 - e^2)$ пересекает ось x -ов в трех точках: 0 и $\pm e$, и будет иметь вид, как показано на фиг. 5. Форма овала и ветви зависят от λ : с увеличением λ овал растягивается параллельно оси y -ов, а ветвь выпрямляется; овал вырождается в пару прямых $x = 0$ и $x = -e$, а ветвь — в прямую $x = e$. С уменьшением λ овал уменьшается, а ветвь наклоняется к оси x -ов. При $\lambda = 0$ овал вырождается в удвоенный отрезок оси x -ов между осью y -ов и прямой $x = -e$, а ветвь — в удвоенную ось x -ов. Если одновременно приближать к нулю и λ и e , то овал стягивается в точку к началу координат, а ветвь, совпадая с осью x -ов своей вершиной, тоже совпадает с началом координат.

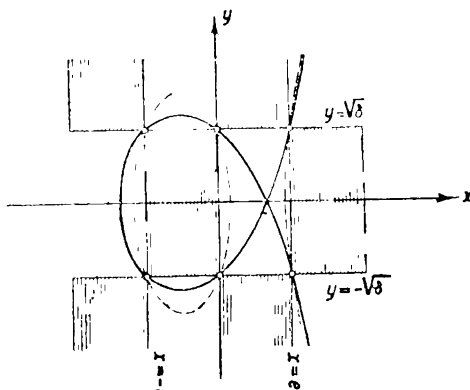
Если оставить λ постоянным и изменять e , то при $e \rightarrow 0$ овал будет стягиваться в точку к началу координат, а ветвь своей вершиной будет приближаться к началу координат, а по форме — к ветви $y^2 = \lambda x^3$. Все это видно непосредственно из уравнения кривой.

Так будет изменяться кривая (3) при $\delta = 0$. Если же $\delta \neq 0$ и его изменять, то при достаточно большом значении λ и e и при достаточно малом значении δ кривая будет состоять из овала и отдельной ветви. Если увеличивать δ , оставляя λ и e постоянными, то овал начнет растягиваться параллельно оси x -ов, ветвь тоже будет приближаться к оси y -ов и будет пересекать прямую $x = e$. При некотором значении $\delta \neq 0$ овал коснется ветви и при дальнейшем увеличении δ кривая опять примет вид, как на фиг. 4.

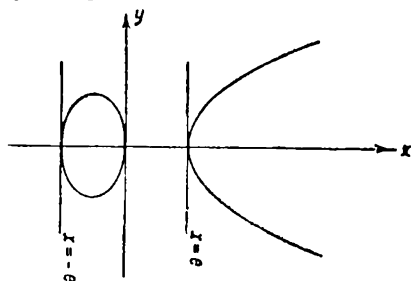
При $\delta \rightarrow \infty$, размеры кривой будут как угодно расти. Если бы мы вместо уравнения кривой (3) взяли уравнение в виде

$$y^2 - \delta = \lambda(x - e)^2(x - e'), \quad (3'')$$

где e и e' — произвольные параметры, то при $e < e'$ это уравнение дает уравнение кривой с так называемой изолитрой двойной точкой, т. е. точкой, через которую не проходит сплошная действитель-



Фиг. 4.



Фиг. 5.

ная ветвь кривой. Что эта кривая в самом деле имеет изолированную точку, видно из того, что в уравнении $(3'')$ при $\lambda > 0$ y будет минимал при всяком $x < e'$ и только при $x = e$, $y = 0$, т. е. только при $x = e$, существует на кривой одна действительная точка $(e, 0)$ при $x < e'$. При $e = e'$ кривая $(3'')$ не будет иметь изолированной точки, но зато у нее появится точка возврата первого рода. Эта точка возврата не будет помещаться в начале координат, как у кривой (1) , а будет в точке $(e, 0)$.

При $e = e' = 0$ получим кривую (1) . Из этого примера видно, что, изменяя параметры, входящие в уравнение кривой, мы можем не только изменять форму и расположение кривой относительно системы координат, не только заставить кривую распадаться на отдельные части и вырождаться в прямые линии, но и переводить одни особенности кривой в другие, например: точку возврата в точки перегиба, точки перегиба в узловую точку, узловую точку в овал и потом в изолированную точку, изолированную — опять в точку возврата первого рода. При этом видно, что точка возврата первого рода является переходом от узловой точки к изолированной и наоборот.

Если изменять параметр k , входящий в уравнение пучка

$$\Phi - k\Psi = 0,$$

то мы получим разные кривые, проходящие через точки пересечения первых двух кривых. Если форма и расположение относительно системы координат для первых двух кривых известны, то можно исследовать и ход третьей кривой пучка. Часто удастся неизвестную кривую так представить в виде уравнения пучка кривых, что кривые Φ и Ψ бывают известными кривыми и это облегчает исследование неизвестной кривой.

Если умножить уравнение кривой $\Phi = 0$ на уравнение кривой $\Psi = 0$, то получим новое выражение:

$$\Phi \cdot \Psi = 0. \quad (4)$$

Это выражение дает уравнение кривой, распадающейся на две кривые $\Phi = 0$ и $\Psi = 0$. Если же в выражение (4) вместо 0 поставить какой-нибудь произвольный параметр ϵ , то получим новое уравнение кривой:

$$\Phi \cdot \Psi = \epsilon, \quad (4')$$

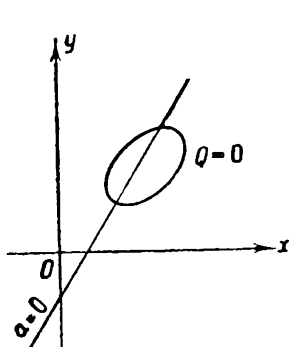
не распадающееся на отдельные кривые.

Так, например, если уравнение прямой $x = 0$ помножить на уравнение $y = 0$, то получим $xy = 0$ — кривую, распадающуюся на пару прямых — осей координат. Но уравнение $xy = \pm \epsilon$ дает уравнение гиперболы. Для $\epsilon > 0$ ветви этой гиперболы расположены в первом и третьем квадрантах, а для $\epsilon < 0$ — во втором и четвертом. Но при $\epsilon \rightarrow 0$ ветви приближаются к осям координат, в соседстве с вершиной гипербола становится более острой и при $\epsilon = 0$ гипербола вырождается в оси координат.

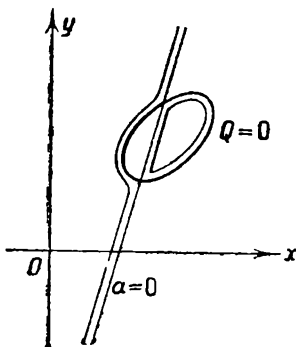
Если умножить уравнение прямой $\alpha = 0$ на уравнение конического сечения $Q = 0$, то получим уравнение $Q\alpha = 0$, кривой третьего порядка, распадающейся на прямую и коническое сечение (фиг. 6). Если же вместо 0 поставить параметр ϵ , то получим уравнение:

$$Q\alpha = \epsilon$$

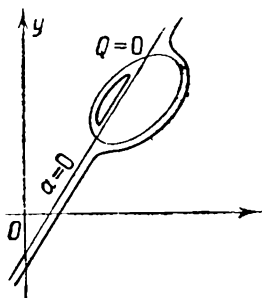
кубической кривой. При $\epsilon > 0$ кривая расположится в тех частях плоскости, где Q и α имеют одинаковые знаки. Тогда кривая



Фиг. 6.



Фиг. 7.



Фиг. 8.

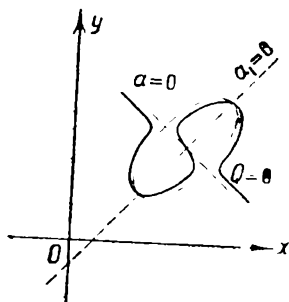
будет иметь вид, как на фиг. 7.² Если же $\epsilon < 0$, то кривая будет только в тех частях плоскости, где Q и α имеют разные знаки, и будет расположена, как показано на фиг. 8.

Следовательно, кривая $Q\alpha = \pm \epsilon$ состоит из овала и отдельной ветви, и при $\epsilon \rightarrow 0$ ветвь и овал приближаются к прямой и к коническому сечению, а при $\epsilon = 0$ совпадают с ними. При $|\epsilon| \rightarrow \infty$ овал стягивается в изолированную точку, а ветвь будет удаляться от конического сечения.¹

Если взять выражение

$$Q\alpha + \lambda\alpha_1 = 0,$$

где $Q = 0$ — коническое сечение, $\alpha = 0$ и $\alpha_1 = 0$ — уравнение прямых, то оно даст уравнение кривой третьего порядка, проходящей через точки пересечения $Q\alpha = 0$ и $\alpha_1 = 0$, и кривая будет иметь такой вид, как показано на фиг. 9.



Фиг. 9.

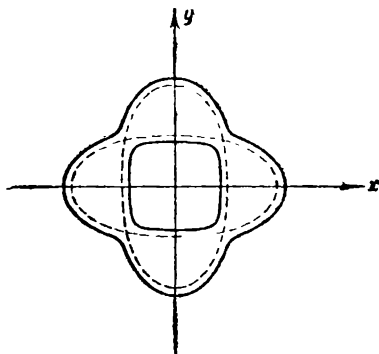
Выражение

$$Q_1Q_2 = \pm \epsilon,$$

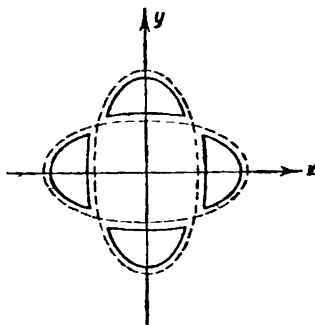
где $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0$ — уравнение двух эллипсов: $Q_1 \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ и $Q_2 \equiv \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} - 1 = 0$, дает уравнение кривой четвертого порядка.

При $\epsilon = 0$ кривая распадается на два эллипса, при $\epsilon > 0$ кривая будет расположена только в тех частях плоскости, где Q_1 и Q_2 имеют одинаковые знаки. Тогда кривая будет иметь форму, показанную на фиг. 10. При $\epsilon < 0$ кривая будет расположена только там, где Q_1 и Q_2 будут иметь разные знаки. Она будет иметь форму, показанную на фиг. 11.

И здесь, когда параметр ϵ приближать к нулю, то видно, как кривая вырождается в пару эллипсов и как точки перегиба на одной кривой (при $\epsilon > 0$) и точки возврата на другой (при $\epsilon < 0$)



Фиг. 10.



Фиг. 11.

переходят в обыкновенные двойные точки, каковыми являются точки пересечения двух эллипсов, а при $|\epsilon| \rightarrow \infty$ видно, как из отдельных овалов получаются изолированные особые точки.

Эти отдельные примеры дают представление о том, в какой степени зависит форма и расположение кривой, а также и ряд особенностей от изменения и количества параметров, входящих в ее уравнение.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МЕСТО ЦЕНТРОВ КОНИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ, ПРИНАДЛЕЖАЩИХ ОДНОМУ И ТОМУ ЖЕ ПУЧКУ.

М. П. Черняев (Ростов-на-Дону).

Пусть пучок конических сечений определяется четырьмя точками $A(a, 0)$, $B(b, 0)$, $C(0, c)$ и $D(0, d)$, через которые проходят все конические сечения пучка. За координатные оси взяты прямые, соединяющие противоположные вершины четырехугольника $ACBD$, вписанного в каждое коническое сечение пучка.

Уравнение сторон и диагоналей четырехугольника $ACBD$ будут:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{y}{c} - 1 &= 0, & (AC) \\ \frac{x}{b} + \frac{y}{d} - 1 &= 0, & (BD) \\ \frac{x}{b} + \frac{y}{c} - 1 &= 0, & (BC) \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{d} - 1 &= 0, & (AD) \\ y &= 0, & (AB) \\ x &= 0, & (CD) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Уравнение пучка конических сечений, описанных около четырехугольника $ACBD$, есть:

$$(cx + ay - ac)(dx + by - bd) - \lambda xy = 0,$$

или

$$cdx^2 + (ad + bc - \lambda)xy + aby^2 - cd(a + b)x - ab(c + d)y + abcd = 0. \quad (2)$$

Координаты центра определяются из системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} 2cdx + (ad + bc - \lambda)y - cd(a + b) &= 0, \\ 2aby + (ad + bc - \lambda)x - ab(c + d) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Исключая переменный параметр λ , получаем уравнение геометрического места центров конических сечений пучка:

$$2cdx^2 - 2aby^2 + ab(c + d)y - cd(a + b)x = 0. \quad (4)$$

Искомое геометрическое место — коническое сечение. На коническом сечении (4) лежат следующие девять точек:

а) шесть точек — середины прямых, соединяющих любые две из данных точек A, B, C, D ,

б) две точки пересечения противоположных сторон четырехугольника $ACBD$,

с) точка пересечения его диагоналей.

Действительно, координаты этих точек:

$$\begin{aligned} M_{AB}\left(\frac{a+b}{2}, 0\right), \quad M_{AC}\left(\frac{a}{2}, \frac{c}{2}\right), \quad M_{AD}\left(\frac{a}{2}, \frac{d}{2}\right), \\ M_{BC}\left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right), \quad M_{BD}\left(\frac{b}{2}, \frac{d}{2}\right), \quad M_{CD}\left(0, \frac{c+d}{2}\right), \\ [AC \text{ и } BD]\left(\frac{ab(c-d)}{cb-ad}, \frac{cd(b-a)}{cb-ad}\right), \\ [BC \text{ и } AD]\left(\frac{ab(c-d)}{ac-bd}, \frac{cd(a-b)}{ac-bd}\right), \\ [AB \text{ и } CD](0, 0) \end{aligned}$$

уравнению (4) удовлетворяют.

СТРОФОИДА КАК ИНВЕРСИОННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАВНОБОЧНОЙ ГИПЕРБОЛЫ.

М. П. Черняев (Ростов-на-Дону).

§ 1. Преобразование инверсии на плоскости.

Пусть дана окружность (C) с центром в точке O и радиусом, равным a . Произвольно взятую точку M соединим прямой с центром окружности. На прямой OM возьмем другую точку M_1 так, чтобы отрезки OM и OM_1 были связаны соотношением:

$$OM \cdot OM_1 = a^2. \quad (1)$$

Точки M и M_1 называются взаимно обратными относительно круга. Окружность (C) называется окружностью инверсии, квадрат ее радиуса — степенью инверсии, а центр — центром или полюсом инверсии. Очевидно, что при движении точки M по прямой OM к центру ей обратная точка M_1 перемещается по той же прямой к ней навстречу. На окружности (C) обе эти точки M и M_1 совпадут, т. е. каждая точка окружности инверсии преобразуется в себя. При неограниченном приближении точки M к центру инверсии ей обратная точка M_1 будет неограниченно удаляться от него. Следовательно, совокупность всех точек, лежащих внутри круга инверсии, преобразуется в совокупность точек, лежащих вне круга, и обратно. Если точка M опишет какую-либо линию, то обратная ей точка M_1 также опишет соответствующую линию. В таком случае говорят, что первая геометрическая фигура преобразована во вторую методом инверсии или обратными радиусами.

Формулы инверсионного преобразования, если начало координат совпадает с центром инверсии, будут:

$$x_1 = \frac{a^2 x}{x^2 + y^2}, \quad y_1 = \frac{a^2 y}{x^2 + y^2}; \quad (2)$$

формулы обратного преобразования:

$$x = \frac{a^2 x_1}{x_1^2 + y_1^2}, \quad y = \frac{a^2 y_1}{x_1^2 + y_1^2}. \quad (3)$$

Формулы (2) и (3) дают возможность, зная координаты одной из точек $M(x, y)$ и $M_1(x_1, y_1)$, определить координаты другой. Точно так же, зная уравнение какой-нибудь линии, можно по формулам (2) и (3) получить уравнение преобразованной линии.

Основными свойствами инверсионного преобразования являются:

а) Преобразованием прямой линии вообще будет окружность. Окружность же при инверсионном преобразовании вообще переходит в окружность. Если преобразуемая прямая или окружность проходит через центр инверсии, то их инверсионными преобразованиями будут прямые.

б) Если две кривые пересекаются под некоторым углом, то и после инверсионного преобразования преобразованные кривые будут пересекаться под тем же углом.

§ 2. Строфоида есть инверсионное преобразование равнобочной гиперболы, когда за центр инверсии взята некоторая точка гиперболы.

Пусть $O(a \sec \varphi, a \operatorname{tg} \varphi)$ — одна из точек равнобочной гиперболы

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad (4)$$

взята за полюс инверсии, точка C — центр гиперболы, S — точка гиперболы, диаметрально противоположная точке O . За радиус круга инверсии возьмем OS , тогда точка S будет сама себе обратной. Касательная к гиперболе в точке O — прямая OL — преобразуется сама в себя и будет определять направление единственной вещественной асимптоты преобразованной кривой, так как точка прикосновения O преобразуется в бесконечно удаленную точку.

Перенесем начало координат в точку O , сохранив прежнее направление осей. Формулами преобразования будут:

$$x = x_1 + a \sec \varphi, \quad y = y_1 + a \operatorname{tg} \varphi. \quad (5)$$

Уравнение гиперболы примет вид:

$$x_1^2 \cos \varphi - y_1^2 \cos \varphi + 2ax_1 - 2ay_1 \sin \varphi = 0. \quad (6)$$

Подвергнем гиперболу (6) преобразованию инверсии с центром в точке $O(0, 0)$ и степенью инверсии $4a^2(1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi)$; формулами преобразования будут:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{4a^2(1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi)x}{x^2 + y^2}, \\ y_1 &= \frac{4a^2(1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi)y}{x^2 + y^2}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Уравнение преобразованной кривой будет:

$$(x^2 + y^2)(x - y \sin \varphi) + 2a \cos \varphi (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi)(x^2 - y^2) = 0. \quad (8)$$

Эта кривая называется строфоидой.

Уравнение касательной к гиперболе в полюсе инверсии будет:

$$x_1 - y_1 \sin \varphi = 0. \quad (9)$$

Эта прямая проходит через полюс инверсии, следовательно, эта прямая преобразуется сама в себя и преобразованное ее уравнение есть

$$x - y \sin \varphi = 0. \quad (10)$$

Прямая (10) OL будет параллельна вещественной асимптоте строфоиды (8):

$$x - y \sin \varphi - 2a \cos \varphi = 0. \quad (11)$$

Так как строфоида является инверсионным преобразованием равнобочной гиперболы, то различные свойства строфоиды могут быть получены преобразованием соответствующих свойств равнобочной гиперболы.

Петля строфоиды представляет собою совокупность точек, обратных точкам той ветви гиперболы, которая не проходит через полюс инверсии; остальная часть строфоиды соответствует другой ветви гиперболы.

§ 3. Порядок и класс строфоиды.

Окружность, проходящая через центр инверсии, пересекает равнобочную гиперболу еще в трех точках; так как при инверсионном преобразовании окружность, проходящая через центр инверсии, обращается в прямую линию, гипербола — в строфоиду и точка пересечения окружности с гиперболой — в точки пересечения прямой со строфоидой, то мы заключаем, что строфоиды есть кривая третьего порядка.

Через центр инверсии и произвольную вторую точку равнобочной гиперболы можно провести две окружности, соприкасающиеся с гиперболой в точке (таких точек будет две), отличной от двух данных. Подвергнув полученную фигуру преобразованию инверсии, заключаем, что через каждую точку строфоиды можно провести к ней две касательные, отличные от той касательной, которая в данной точке имеет точку прикосновения; следовательно, строфоиды есть кривая четвертого класса. Касательная в каждой точке строфоиды имеет с кривой еще одну общую точку, которая называется тангенциальной по отношению к первой. Каждая точка строфоиды будет тангенциальной точкой по отношению к двум точкам, которые называются сопряженными точками.

§ 4. Асимптота строфоиды.

Нормаль к гиперболе (6) в полюсе инверсии $O(0, 0)$ имеет уравнение:

$$x_1 \sin \varphi + y_1 = 0. \quad (12)$$

Точка ее пересечения с гиперболой (6):

$$A \left[-\frac{2a(1 + \sin^2 \varphi)}{\cos^3 \varphi}, \frac{2a \sin \varphi (1 + \sin^2 \varphi)}{\cos^3 \varphi} \right].$$

Окружность диаметра OA имеет уравнение:

$$(x_1^2 + y_1^2) \cos^3 \varphi + 2a(1 + \sin^2 \varphi)(x_1 - y_1 \sin \varphi) = 0 \quad (13)$$

и проходит через точку $S(-2a \sec \varphi, -2a \tg \varphi)$, диаметрально противоположную точке $O(0, 0)$.

После преобразования инверсии окружность (13) преобразуется в прямую OL_1 :

$$x - y \sin \varphi + 2a \cos \varphi = 0. \quad (14)$$

Последняя прямая параллельна асимптоте строфоиды. Точка A гиперболы преобразуется в следующую точку на строфоиде:

$$A' \left[-\frac{2a \cos \varphi}{1 + \sin^2 \varphi}, \frac{2a \sin \varphi \cos \varphi}{1 + \sin^2 \varphi} \right].$$

Точка A' есть точка пересечения прямой SL_1 , параллельной к SL , и прямой, проходящей через полюс инверсии перпендикулярно к SL_1 , уравнение которой

$$x \sin \varphi + y = 0,$$

т. е. точка A' является проекцией полюса инверсии O на прямую SL_1 и принадлежит строфоиде.

Круг, соприкасающийся с гиперболой (6) в полюсе инверсии $O(0, 0)$, имеет уравнение:

$$(x_1^2 + y_1^2) \cos^3 \varphi - 2a(1 + \sin^2 \varphi)(x_1 - y_1 \sin \varphi) = 0. \quad (15)$$

Этот соприкасающийся с гиперболой в точке O круг будет симметричен с кругом (13) относительно точки O . Инверсионным преобразованием соприкасающегося круга будет вещественная асимптота строфоиды:

$$x - y \sin \varphi - 2a \cos \varphi = 0. \quad (11)$$

Эта асимптота (11) будет симметрична с прямой SL_1 относительно полюса инверсии O .

Круг, соприкасающийся с гиперболой в точке O , имеет с последней кривой еще общую точку B , которая лежит на перпендикуляре к OS , восстановленном в точке O . Точки A и B — диаметрально противоположные точки гиперболы. Круг диаметра SB касается кривой в точке S и проходит через точку O . Следовательно, строфоида пересекает свою вещественную асимптоту в точке B' , лежащей на перпендикуляре, восстановленном в точке O к OS . Точка B' будет тангенциальной точкой по отношению к точке S .

Действительно, уравнение соприкасающегося круга:

$$(x_1^2 + y_1^2) \cos^3 \varphi - 2a(1 + \sin^2 \varphi)(x_1 - y_1 \sin \varphi) = 0;$$

уравнение гиперболы:

$$x_1^2 \cos \varphi - y_1^2 \sin \varphi + 2ax_1 - 2ay_1 \sin \varphi = 0;$$

уравнение прямой, проходящей через точку O , перпендикулярно к OS :

$$x_1 + y_1 \sin \varphi = 0.$$

Точка пересечения гиперболы и прямой $B\left(\frac{4a \sin^2 \varphi}{\cos^3 \varphi}, -\frac{4a \sin \varphi}{\cos^3 \varphi}\right)$ принадлежит соприкасающемуся кругу. Серединой отрезка AB будет точка $C(-a \sec \varphi, -a \tg \varphi)$ — центр равнобокой гиперболы.

Круг диаметра SB имеет уравнение:

$$(x_1^2 + y_1^2) \cos^3 \varphi - 2a(2 \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi)x_1 + 2a \sin \varphi (\cos^2 \varphi + 2)y_1 = 0. \quad (16)$$

Последняя окружность проходит через точку $O(0, 0)$. Уравнение касательной к окружности (16) в точке S :

$$(y_1 + 2a \tg \varphi) \sin \varphi = x_1 + 2a \sec \varphi. \quad (17)$$

Уравнение касательной к гиперболе (6) в той же точке $S(-2a \sec \varphi, -2a \operatorname{tg} \varphi)$ будет совпадать с (17), следовательно, круг диаметра SB действительно касается гиперболы в точке S .

Точка, получаемая инверсионным преобразованием точки B будет $B'(a \cos \varphi, -\frac{a \cos \varphi}{\sin \varphi})$. Последняя точка B' лежит на строфоиде и на ее вещественной асимптоте:

$$x - y \sin \varphi - 2a \cos \varphi = 0. \quad (11)$$

§ 5. Круги, в которые преобразуются асимптоты равнобоочной гиперболы.

Асимптоты равнобоочной гиперболы определяются уравнениями:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + a(\sec \varphi - \operatorname{tg} \varphi), \\ y_1 = -x_1 - a(\sec \varphi + \operatorname{tg} \varphi). \end{cases} \quad (18)$$

Инверсионным преобразованием этих прямых линий, не проходящих через полюс инверсии, будут два круга, соприкасающиеся со строфоидой в ее двойной точке $O(0, 0)$ — полюсе инверсии. Оба эти круга будут касаться касательной к строфоиде в ее двойной точке и пройдут через точку C' , представляющую собою инверсионное преобразование центра гиперболы S . Точка C' будет симметрична с точкой O относительно точки S .

Действительно, координаты точек:

$$\begin{aligned} O(0, 0), \quad S(-2a \sec \varphi, -2a \operatorname{tg} \varphi), \\ C(-a \sec \varphi, -a \operatorname{tg} \varphi), \quad C'(-4a \sec \varphi, -4a \operatorname{tg} \varphi). \end{aligned}$$

Уравнения соприкасающихся кругов в двойной точке будут:

$$\begin{cases} (x^2 + y^2)(\sec \varphi - \operatorname{tg} \varphi) + 4a(1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi)(x - y) = 0, \\ (x^2 + y^2)(\sec \varphi + \operatorname{tg} \varphi) + 4a(1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi)(x + y) = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Касательные к строфоиде и к кругам (19) в точке O будут общие

$$y \pm x = 0.$$

§ 6. Точки перегиба строфоиды.

Точками перегиба строфоиды будут точки, обратные точкам прикосновения соприкасающихся кругов к гиперболе, которые проходят через точку O . Известна следующая теорема Штейнера-Иоахимсталля:

На всяком коническом сечении существуют три точки, соприкасающиеся круги в которых проходят через данную точку кривой; эти точки принадлежат кругу, который проходит через данную точку, и образуют тре-

Рассмотрим сначала, каким условиям должны удовлетворять коэффициенты этого уравнения, чтобы произведение расстояний от начала координат до точек пересечения прямой, проведенной через начало координат, с искомой кривой было величиной постоянной независимо от направления прямой.

Заменим декартову систему координат полярной, подставляя в уравнение (1)

$$x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi.$$

Мы получим уравнение:

$$\begin{aligned} R^m (A_0 \cos^m \varphi + A_1 \cos^{m-1} \varphi \sin \varphi + A_2 \cos^{m-2} \varphi \sin^2 \varphi + \dots + A_m \sin^m \varphi) \\ + R^{m-1} (B_0 \cos^{m-1} \varphi + B_1 \cos^{m-2} \varphi \sin \varphi + \\ + B_2 \cos^{m-3} \varphi \sin^2 \varphi + \dots + B_m \sin^{m-1} \varphi) + \\ \dots \dots \dots \\ + R (K_0 \cos \varphi + K_1 \sin \varphi) + L = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

При данном угле $\varphi = \varphi_0$ уравнение (2) превращается в алгебраическое уравнение m -й степени по отношению к R ; такое уравнение, как известно, имеет m корней, между которыми могут быть как действительные, так и комплексные, и притом произведение корней равно частному от деления свободного члена L на коэффициент при высшей степени R , т. е. на $(A_0 \cos^m \varphi + \dots + A_m \sin^m \varphi)$:

$$\begin{aligned} R_1 R_2 R_3 \dots R_m = \\ = \frac{L}{A_0 \cos^m \varphi + A_1 \cos^{m-1} \varphi \sin \varphi + A_2 \cos^{m-2} \varphi \sin^2 \varphi + \dots + A_m \sin^m \varphi}. \end{aligned} \quad (3)$$

Заметим теперь, что в равенстве (3) левая часть как раз и есть произведение расстояний от начала координат до точек пересечения кривой с прямой, проходящей через полюс и образующей угол φ_0 с полярной осью.

Мы поставили условие, чтобы это произведение не зависело от величины φ_0 , а для этого необходимо и достаточно, чтобы знаменатель правой части равенства (3), т. е. коэффициент при m -й степени R в уравнении (2) был величиной постоянной, не зависящей от φ . Разделив уравнение (2) на этот постоянный коэффициент, мы получаем равносильное уравнение с коэффициентом 1 при R^m :

$$R^m + BR^{m-1} + CR^{m-2} + \dots + KR + L = 0, \quad (4)$$

где B, C, \dots, K являются целыми функциями от $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$. Если мы, обратно, переведем уравнение (4) из полярных координат в прямоугольные, заметив притом, что m должен быть четным, для того чтобы левая часть уравнения стала целым многочленом относительно x и y , мы получим уравнение:

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)^{\frac{m}{2}} + B_0 x^{m-1} + B_1 x^{m-2} y + \dots + B_{m-1} y^{m-1} + \dots \\ \dots + K_0 x + K_1 y + L = 0; \end{aligned}$$

сделав $\frac{m}{2} = n$, получим окончательно уравнение:

$$(x^2 + y^2)^n + F_{2n-1}(x, y) = 0, \quad (5)$$

где $F_{2n-1}(x, y)$ обозначает целую функцию порядка не выше $(2n-1)$ относительно x и y .

Докажем теперь, что если мы проведем прямую через какую бы то ни было другую точку M плоскости, то произведение расстояний от этой точки до точек пересечения ее с кривой, заданной уравнением (5), будет постоянным независимо от направления прямой.

Для доказательства перенесем начало координат в точку $M(a, b)$, подставляя в уравнение (5)

$$x = x_1 + a, \quad y = y_1 + b.$$

Первый член этого уравнения преобразуется в

$$\begin{aligned} (x_1^2 + y_1^2 + 2ax_1 + 2by_1 + a^2 + b^2)^n = \\ = (x_1^2 + y_1^2)^n + n(x_1^2 + y_1^2)^{n-1}(2ax_1 + 2by_1 + a^2 + b^2) + \dots \\ \dots + (2ax_1 + 2by_1 + a^2 + b^2)^n. \end{aligned}$$

Все остальные члены уравнения (5) преобразуются в другой многочлен порядка не выше $2n-1$; таким образом в результате получим уравнение вида:

$$(x_1^2 + y_1^2)^n + f_{2n-1}(x, y) = 0,$$

где $f_{2n-1}(x, y)$ также будет целым многочленом относительно x, y порядка не выше $(2n-1)$ и будет иметь некоторый свободный член l , равный произведению всех расстояний от точки M до точек пересечения прямой с кривой, и это произведение, естественно, будет независимым от направления прямой.

Кроме окружности и системы окружностей простейшими кривыми, удовлетворяющими поставленным выше условиям, являются четырехлепестный венчик, лемниската Бернулли, овал Кассини. Уравнения их соответственно:

$$R = a \sin 2\varphi \quad \text{или} \quad (x^2 + y^2)^3 = 4a^2 x^2 y^2,$$

$$R^2 = a^2 \cos 2\varphi \quad \text{или} \quad (x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2),$$

$$R^2 = c^2 \cos 2\varphi \pm \sqrt{c^4 \cos^2 \varphi - (c^4 - b^4)}$$

или

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2 (x^2 - y^2) = b^4 - c^4.$$

Способ, примененный нами для решения настоящей задачи, может быть применен с таким же успехом для решения аналогичной задачи по стереометрии: найти общее уравнение поверхности m -го порядка, обладающей тем свойством, что произведение всех m расстояний от какой-нибудь точки пространства M до точек пересечения этой поверхности с прямой, проходящей через данную точку M , есть величина постоянная, независимая от направления прямой.

Уравнение такой поверхности в полярных координатах:

$$R^{2n} + R^{2n-1} f_1(\varphi, \theta) + R^{2n-2} f_2(\varphi, \theta) + \dots + L = 0, \quad (6)$$

где $f_1(\varphi, \theta)$, $f_2(\varphi, \theta)$ и т. д. — целые функции относительно $\sin \varphi$, $\cos \varphi$, $\sin \theta$, $\cos \theta$.

Уравнение ее в прямоугольных координатах будет:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^n + F_{2n-1}(x, y, z) = 0.$$

Из простейших поверхностей, кроме шара назовем тор, т. е. поверхность, образованную вращением окружности вокруг какой-нибудь прямой, лежащей на одной плоскости с ней.

ПРОСТОЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ ЛЕМНИСКАТЫ БЕРНУЛЛИ.

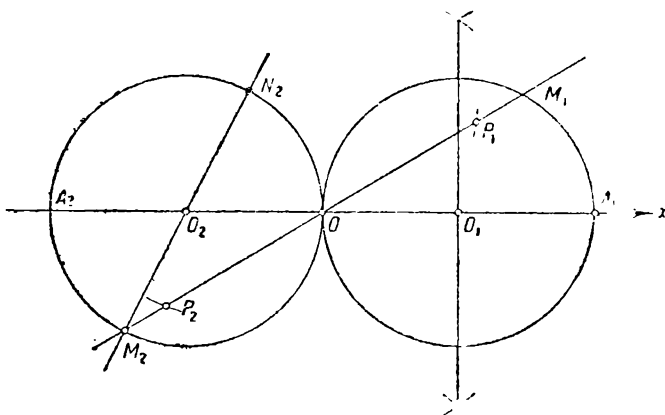
Г. А. Ключарев (г. Куйбышев).

Построение базируется на теореме, что лемниската Бернулли

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$$

может быть получена из пары внешне касающихся в полюсе окружностей

$$r^2 = a^2 \cos^2 \varphi$$



Фиг. 1.

путем точечного преобразования (преобразование вдоль радиуса-вектора), определяемого формулой:

$$r = \frac{\rho \cos \varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

Доказательства не привожу, так как оно очевидно. Из последней же формулы следует, что

$$\rho^2 = r^2 - r^2 \operatorname{tg}^2 \varphi;$$

отсюда — построение (фиг. 1).

На полярной оси OX по обе стороны от полюса откладываем отрезки $OA_1 = OA_2 = a$ и на них как на диаметрах строим окружности. Под углом φ к оси через полюс проводим луч, пересекающий окружности в точках M_1 и M_2 . Через точку M_2 и центр O_2 левой окружности проводим диаметр M_2N_2 , из конца N_2 которого радиусом $OM_1 = OM_2 = r$ на луче M_1M_2 засекаем две точки P_1 и P_2 . Они и будут точками лемнискаты.

При проведении луча M_1M_2 , как это следует из формулы преобразования, углы φ необходимо брать в интервале $-45^\circ < \varphi < +45^\circ$.

Серединный перпендикуляр отрезка OA_1 , проведенный для определения центра O_1 правой окружности, пересекаясь с ней, укажет границы этого интервала.

В ТРЕУГОЛЬНИКЕ РАВНЫМ БИСЕКТРИСАМ СООТВЕТСТВУЮТ РАВНЫЕ УГЛЫ (РАСПРОСТРАНЕНИЕ НА ГЕОМЕТРИЮ ЛОБАЧЕВСКОГО).

Н. А. Иванов (Ярославль).

Докажем сначала две леммы:

Лемма I. Если в треугольнике, не изменяя двух его углов, будем увеличивать сторону, соединяющую вершины этих углов, то две другие стороны треугольника будут увеличиваться.

Доказательство. Пусть $\angle ABC = \angle ADE$ и $AD > AB$ (фиг. 1). Прямая BC не может пересечься с DE и, следовательно, точка C лежит между A и E , а потому $AE > AC$. Далее:

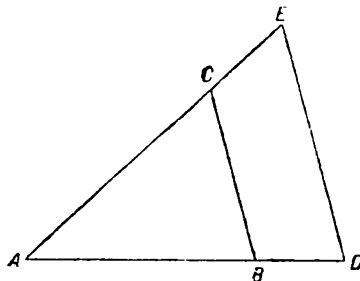
$$\frac{\text{sh } AE}{\sin \angle ADE} = \frac{\text{sh } DE}{\sin A}, \quad \frac{\text{sh } AC}{\sin \angle ABC} = \frac{\text{sh } BC}{\sin A},$$

откуда

$$\text{sh } DE = \frac{\sin A}{\sin \angle ADE} \cdot \text{sh } AE; \quad \text{sh } BC = \frac{\sin A}{\sin \angle ABC} \cdot \text{sh } AC.$$

Так как $AE > AC$, то $DE > BC$ ¹⁾.

Лемма II. Если в треугольнике $\angle C > \angle B$, то $\sin C > \sin B$. Действительно, обозначая через c и b стороны, противолежащие соответственно углам C и B , будем иметь $c > b$. Так как $\frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\text{sh } c}{\text{sh } b}$, то справедливость теоремы очевидна.



Фиг. 1.

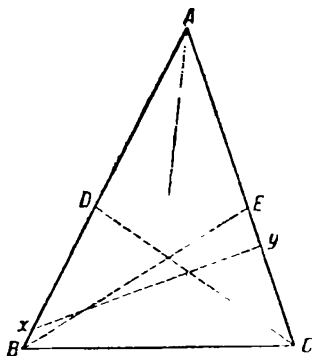
¹⁾ Существует некоторый предел для увеличения стороны AB . Когда AB достигает этой предельной длины, стороны AC и BC перестают пересекаться и прямые AB , AC и BC уже не составляют треугольник.

(Прим. ред.)

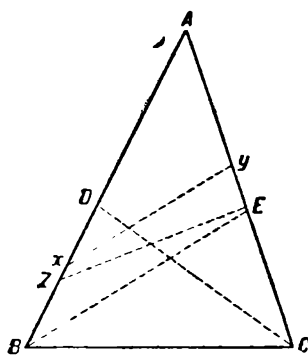
Докажем теперь, что в треугольнике большему углу соответствует меньшая биссектриса, откуда сразу вытекает теорема о равенстве углов в треугольнике (и, следовательно, его равнобедренность) при равенстве двух его биссектрис.

Итак, пусть $\angle ACB > \angle ABC$ (фиг. 2). Докажем, что $DC < BE$, где DC и BE — соответственно биссектрисы углов ACB и ABC .

Предположим сначала, что $\angle BDC$ острый. Повернем треугольник ADC около биссектрисы угла A , как около оси. Тогда точка C упадет на отрезке AB в точку x . Линия CD займет положение xu , причем точка u может совпадать с точкой E , или упадет внутри отрезка AE , или, наконец, внутри отрезка EC .



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Разберем сначала первый случай, т. е. предположим, что точки u и E совпадают. Тогда $\angle ABE = \frac{1}{2} \angle ABC$ есть острый, $\angle Axu = \angle DCA = \frac{1}{2} \angle ACB$ есть тоже острый, а, следовательно, $\angle Bxu$ тупой, и из треугольника Bxu вытекает, что $xu < BE$. Но xu есть DC в своем новом положении, а потому $DC < BE$, и лемма в этом случае доказана.

Второй случай. Пусть точка u оказалась между точками A и E (фиг. 3). Проведем через точку E линию Ez , пересекающую отрезок Bx в точке z так, чтобы $\angle Axu = \angle AzE$; это всегда возможно, так как $\angle Axy = \angle ACD = \frac{1}{2} \angle ACB > \frac{1}{2} \angle ABC = \angle ABE$ и $\angle Axu > \angle Axy$. Тогда по лемме 1 $xu < zE$. Далее $\angle Axu = \frac{1}{2} \angle ACB$ есть острый, а потому $\angle AzE$ тоже острый, и, следовательно, $\angle BzE$ тупой, и из треугольника BzE следует: $zE < BE$. Отсюда $xu < zE < BE$. Но xu есть DC , и лемма доказана.

Разберем, наконец, третий случай (фиг. 4), когда u окажется между точками E и C . Тогда $\angle BDC = \angle xuC > \angle BEC$. Так как по предположению $\angle BDC$ острый, то $\angle BEC$ будет тоже острый. Из треугольников BDC и BEC имеем:

$$\text{sh } BE = \frac{\sin \angle ACB}{\sin \angle BEC} \cdot \text{sh } BC; \quad \text{sh } DC = \frac{\sin \angle ABC}{\sin \angle BDC} \cdot \text{sh } BC. \quad (1)$$

Так как $\angle ACB > \angle ABC$, то по лемме II

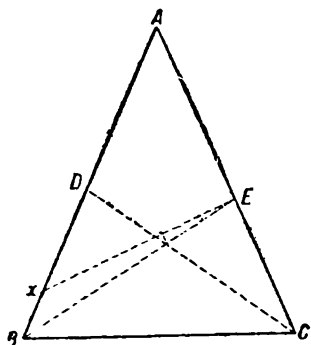
$$\sin \angle ACB > \sin \angle ABC. \quad (2)$$

Далее, так как по предположению $\angle BDC$ острый и $\angle BEC < \angle BDC$, то

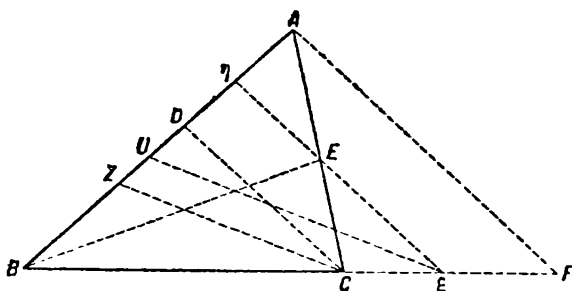
$$\sin \angle BEC < \sin \angle BDC. \quad (3)$$

Принимая во внимание соотношения (1), (2) и (3), получим $BE > DC$.

Осталось разобрать случай, когда $\angle BDC$ прямой или тупой. Опишем из точки A как из центра дугу радиуса AB . Пусть эта дуга пересечет основание BC в точке F (фиг. 5). Тогда треуголь-



Фиг. 4.



Фиг. 5.

ник ABF равнобедренный. Проведем через точку E линию $\eta\xi$ так, чтобы $\angle B\xi\eta = \angle F = \angle ABC$. Тогда бисектриса угла $B\xi\eta$, именно линия ξU , будет равна BE , а $\angle B\xi u = \frac{1}{2} \angle B\xi\eta = \frac{1}{2} \angle ABC < \frac{1}{2} \angle ACB = \angle BCD$, а потому, если мы проведем линию CZ так, чтобы $\angle BCZ = \angle B\xi U$, то линия CZ пойдет внутри угла BCD . В треугольнике ZCD линия ZC окажется теперь лежащей против прямого или тупого угла, а потому $DC < ZC$. Но по лемме I $ZC < U\xi = BE$, следовательно, $DC < BE$, что и требовалось доказать.

К МЕТОДИКЕ ПРЕПОДАВАНИЯ РЯДОВ.

И. Б. Чарнецкий (Астрахань).

1. Введение.

В настоящей статье делается попытка установить наиболее действенные методы преподавания и наиболее целесообразное распределение материала в разделе «Ряды» программы математического анализа для пединститутов. Если бы этому разделу отводилось достаточное число часов, то разработка методики преподавания рядов, как и вообще исчисления бесконечно малых, могла бы пойти по пути, указанному Ф. Клейном:

„1. Я иллюстрирую абстрактные рассуждения при помощи наглядных, конкретных чертежей (приближенные кривые для рядов Фурье и Тейлора).

2. Я подчеркиваю связь с соседними областями, например с разностным и интерполяционным исчислениями и даже с философскими исследованиями.

3. Я указываю на историю развития предмета.

4. Я привожу примеры изложения из популярной литературы с целью выяснить разницу между основанными на ней воззрениями публики и воззрениями специалистов-математиков¹⁾“.

Мы лишены возможности за недостатком места дать не только полное обоснование предлагаемой здесь схемы расположения материала, последовательно по рубрикам, но и задержаться с исчерпывающей полнотой даже на тех ее частях, которые совсем не рассматриваются или только вскользь затрагиваются в учебниках. Только 1-я и 2-я рубрики приводимой ниже схемы расположения программного материала ввиду их своеобразия не могут быть оставлены без подробной мотивировки.

II. Схема расположения программного материала по теории рядов.

1. Выражение произвольных функций суммами элементарных функций (назначение рядов).

2. Пропедевтическое знакомство со средствами получения рядов. Последовательности и ряды. Постановка вопроса о сходимости рядов. Определение сходимости рядов.

¹⁾ Ф. Клейн, Элементарная математика с точки зрения высшей, т. I, ГТТИ, 1933 стр. 151.

3. Признаки сходимости знакоположительных рядов.
4. Сходимость знакопеременных рядов.
5. Абсолютная сходимость рядов; алгебраические операции над рядами.
6. Равномерная сходимость рядов. Степенные ряды. Операции анализа над рядами.
7. Ряды Тейлора и Маклорена; остаточные члены.
8. Роль и место рядов в математике.

Приведенное здесь расположение материала находится в связи с некоторыми соображениями, изложенными в статье проф. В. И. Гливенко¹⁾. Если все рубрики этой схемы, за исключением 1-й, 2-й и 3-й, могут вызвать дискуссию лишь в отношении последовательности, характера и объема изложения, что подтверждается сравнением наиболее распространенных у нас учебников и пособий, то 1-я, 2-я и 3-я приобретают особую значимость, так как понятия ряда и его сходимости должны усваиваться учащимися «не в виде новой абстрактной дисциплины, а в органической связи со всем преподаванием» (Клейн). Средствами, направленными к достижению этой цели, мы выбираем конечные ряды, разложение в ряды элементарных функций, не зависящее от правила Тейлора „Taylorfreie“, выяснение назначения рядов, иллюстрирование материала при помощи чертежей, связь с исчислением конечных разностей и ссылки на избранные учебники.

III. О задаче выражения произвольных функций суммами элементарных функций (назначение рядов).

1. Конечные ряды. Прежде всего представляется уместным напомнить свойства конечных арифметической и геометрической прогрессий, остановиться на сумме конечного числа членов рядов четных и нечетных целых чисел, рассмотреть сумму $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$, если это не было сделано раньше²⁾; выводы соответствующих формул следует разнообразить, используя графические иллюстрации³⁾. Так, например, если имеется для суммы первых натуральных чисел $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$, то для ряда, начинающегося не с 1, а с m , имеем: $\frac{1}{2}(n - m + 1)(n + m)$; мы здесь делаем ссылку на то, что в первом случае мы получали суммы первого и последнего, второго и предпоследнего членов, которые каждый раз давали $(n + 1)$ при числе подобных сумм, равно $\frac{n}{2}$; во втором

¹⁾ Об учебнике по математическому анализу «За коммунистическое просвещение» (от 24/IX 1931 г.).

²⁾ Геометрическое истолкование этой формулы можно найти в статье L u c k e v, Anschauliche Summierung der Quadratzahlen und Berechnung des Pyramideninhalts.

³⁾ См. В. М р о ч е к и С. Ф и л и п п о в и ч, Педагогика математики, 1910, стр. 235—236.

случае мы имеем $(n - m + 1)$ членов, т. е. $\frac{n - m + 1}{2}$ сумм, из которых каждая равна $n + m$. Дальнейшее обобщение: числовой ряд развивается не по ступеням, каждый раз по 1, но по ступеням размера d ; в таком случае мы вводим, кроме значений m и n первого и последнего членов, еще число z членов и получаем сумму $\frac{1}{2} z (m + n)$ или $\frac{1}{2} (n - m + d) \cdot \frac{m + n}{d}$, так как $n = m + d(z - 1)^1$.

Арифметическому ряду противопоставляется геометрический ряд; в нем два смежных члена повсюду образуют не равные разности, но равные отношения. Вот один из вариантов вывода суммы его членов. Пусть

$$s = u + uq + uq^2 + \dots + uq^{n-1}.$$

Эту сумму умножим на q :

$$qs = uq + uq^2 + uq^3 + \dots + uq_n = s - u + uq_n,$$

отсюда

$$s = \frac{uq^n - u}{q - 1}^2).$$

2. Бесконечные ряды. Значительный интерес, даже при беглом знакомстве, должны вызвать у учащихся бесконечные ряды. Здесь прежде всего разъясняется, что сумма бесконечно многих членов не всегда бесконечно велика. Непосредственное нахождение частных сумм ряда $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$, а именно $1, 1\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4}, \dots$, показывает, что к $1\frac{3}{4}$ до 2 не хватает $\frac{1}{4}$, далее $\frac{1}{8}$ и т. д.; эта разность делается все меньше и меньше.

Можно подойти к решению этого вопроса и формально (сделав соответствующие оговорки):

$$2s = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots,$$

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots,$$

$$s = 2.$$

Наконец, следует остановиться и по существу на софизме Зенона, связанном с этим рядом. Здесь тщательно должны быть продуманы студентами: бесконечная последовательность промежутков между Ахиллесом и черепахой:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \rightarrow 0$$

и бесконечная последовательность истекших от начала движения промежутков времени:

$$1, 1\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4}, 1\frac{7}{8}, \dots \rightarrow 2.$$

¹⁾ F. Auerbach, Lebendige Mathematik, стр. 170.

²⁾ Там же, стр. 171.

«Значит, в то время, как положения обоих приближаются к точке, где Ахиллес догонит черепаху, время, необходимое для прохождения отдельных расстояний от начала движения, приближается к пределу 2 мин. Зенон просто не дает Ахиллесу достаточно времени, чтобы догнать черепаху», «за бесконечным рядом не признается конечное значение суммы»¹⁾).

После рассмотрения геометрического ряда (числового) наступает время для использования рядов при приближенном решении некоторых задач.

Мы ограничимся указанием примеров, подробно рассмотренных в книге: проф. Амосов и др., Практический учебник высшей математики, ч. III, 1932, ГТТИ (тема 6-я). Там упоминаются случаи применения рядов в арифметике:

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots,$$

в алгебре:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad (\text{при } |x| < 1)$$

в анализе:

$$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{10+x^4} = \frac{1}{10} \int_0^1 x^2 dx - \frac{1}{100} \int_0^1 x^6 dx + \frac{1}{1000} \int_0^1 x^{10} dx - \dots,$$

(так как $\frac{x^2}{10+x^4} = \frac{x^2}{10} - \frac{x^6}{100} + \frac{x^{10}}{1000} - \dots$, что получается от деления x^2 на $10+x^4$).

Нельзя упустить здесь благоприятный случай для экскурса в историю математики: применение Архимедом суммирования бесконечного ряда для определения площади параболического сегмента²⁾, Бруннером — для площади гиперболического сегмента³⁾, Ньютоном — при обращении логарифмического ряда⁴⁾ и получении разложений $\sin z$ и $\cos z$ ⁵⁾, Лейбницем — знакочередующегося ряда⁶⁾. Исторический обзор суммирования бесконечных рядов можно закончить цитатой из книги акад. А. Н. Крылова («Леонард Эйлер», изд-во АН СССР, стр. 19—22) о том «скандале в математике», который длился со времени Эйлера 75 лет и был вызван использованием рядами без исследования их сходимости.

Даже на этом этапе рассмотрения рядов не лишним будет констатирование следующих фактов: ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ сходится

¹⁾ Проф. Л. Геффтер, Что такое математика? изд. «Петроград», 1924, стр. 33, ср. проф. С. А. Богомолов, Актуальная бесконечность.

²⁾ Г. Г. Цейтлен, История математики в древности и в средние века, ГТТИ, 1932, стр. 12).

³⁾ Г. Г. Цейтлен, История математики в XVI и XVII вв., ГТТИ, 1933, стр. 30—301.

⁴⁾ Там же, стр. 355.

⁵⁾ Там же, стр. 359.

⁶⁾ Там же, стр. 396.

очень медленно; так, при суммировании 24 первых членов правильны только пять первых десятичных знаков ($s_{24} = 1,9999964$), тогда как в ряде $1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$ первыми 10 членами мы достигаем точности до миллионной доли значения.

IV. Пропедевтическое знакомство со средствами получения рядов. Последовательности и ряды.

Если для целей анализа главное значение бесконечных рядов— это дать аналитическое выражение трансцендентной функции, определяющее ее свойства и числовое значение, то становится понятным то большое значение, которое придают формулам Тейлора и Маклорена в теории рядов. Однако при пренебрежении другими средствами получения рядов и пользовании исключительно формулами Тейлора и Маклорена у учащихся может сложиться преувеличенное мнение о их «мощи». Итак, законно сомнение в неограниченном использовании формулы Тейлора, имея в виду исследование остаточного члена как необходимую составную часть развертывания строки Тейлора. «Исследование остаточного члена разложения в ряд показательной и тригонометрической функций идет просто, но сильно запутывается для обратных функций и бинорма $(1+x)^m$. Для обратных функций приходят к цели значительно скорее посредством интегрирования, чем посредством ряда Тейлора. Если мы здесь откажемся от его систематизирующего значения в теории действительных и комплексных функций и обратим внимание только на его первоначальную производительную цель— получение арифметического выражения для функций, которые прежде были определены отвлеченно, то мы признаемся в том, что в науке все же, собственно говоря, может быть получено с его помощью очень немного разложений в ряды¹⁾». Мы предлагаем на этом пропедевтическом этапе знакомства учащихся с рядами следующие средства получения рядов: 1) преобразование функций на основе выбора x за меру и 2) «плодотворное правило» интегрального исчисления.

1. Преобразование функции $F(x)$ на основе выбора x за меру²⁾. Пусть $F(x)$ —некоторая функция от x ; примем за меру переменную x , с помощью которой требуется преобразовать в сумму функций функцию $F(x)$:

$$F(x) = A + \Phi(x),$$

где A —количество, не зависящее от меры, а $\Phi(x)$ —функция от x , измеряемая этой мерой, т. е. $\Phi(0) = 0$ и $A = F(0)$. Ставим усло-

¹⁾ K. Fladt, Reihentwicklung und Taylorscher Satz, Zeitschrift für math. naturwis. Unterricht., 1933, 2-я и 3-я тетради.

²⁾ Dictionnaire des sciences mathématiques pures et appliquées. Sous la direction de A.—S. Montferrier, 1835, «Série».

вие, чтобы $\frac{\Phi(x)}{x}$ не делалось неопределенным. Так как $\Phi(x)$ сравнима с x , то положим

$$\frac{\Phi(x)}{x} = F_1(x),$$

причем $F_1(x)$ должна иметь определенное значение для всех значений x . Получаем снова преобразование:

$$F_1(x) = B + \Phi_1(x),$$

где B не зависит от x , а $\Phi_1(x)$ — функция, измеряемая x и т. д. Объединим все вышеизложенное:

$$\begin{aligned} F(x) &= A + \Phi(x), \\ \frac{\Phi(x)}{x} &= F_1(x) = B + \Phi_1(x), \\ \frac{\Phi_1(x)}{x} &= F_2(x) = C + \Phi_2(x), \\ \frac{\Phi_2(x)}{x} &= F_3(x) = D + \Phi_3(x), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} F(x) &= A + \Phi(x), \\ \Phi(x) &= Bx + x \cdot \Phi_1(x), \\ \Phi_1(x) &= Cx + x \cdot \Phi_2(x), \\ \Phi_2(x) &= Dx + x \cdot \Phi_3(x) \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

или

$$F(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots$$

Пример 1.

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{d}{m+x}; \\ A &= \frac{d}{m}; \quad \Phi(x) = F(x) - A = \frac{d}{m+x} - \frac{d}{m} = -\frac{d}{m} \frac{dx}{(m+x)}; \\ F_1(x) &= \frac{\Phi(x)}{x} = -\frac{d}{m(m+x)}; \\ B &= -\frac{d}{m^2}; \quad \Phi_1(x) = F_1(x) - B = -\frac{d}{m(m+x)} + \frac{d}{m^2} = \frac{dx}{m^2(m+x)}; \\ F_2(x) &= \frac{\Phi_1(x)}{x} = -\frac{d}{m^2(m+x)}; \quad C = \frac{d}{m^3}; \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Таким образом:

$$\frac{d}{m+x} = \frac{d}{m} - \frac{d}{m^2}x + \frac{d}{m^3}x^2 - \frac{d}{m^4}x^3 + \dots$$

Пример 2. $F(x) = \sqrt{a+x}$.

$$\begin{aligned} A &= F(0) = \sqrt{a}; \quad \Phi(x) = F(x) - A = \sqrt{a+x} - \sqrt{a}; \\ F_1(x) &= \frac{\Phi(x)}{x} = \frac{\sqrt{a+x} - \sqrt{a}}{x}. \end{aligned}$$

Так как $F_1(0) = \frac{0}{0}$, то умножаем члены дроби на $\sqrt{a+x} + \sqrt{a}$; получим:

$$\begin{aligned} F_1(x) &= -\frac{1}{\sqrt{a+x} + \sqrt{a}}; \quad B = F_1(0) = -\frac{1}{2\sqrt{a}}; \\ \Phi_1(x) &= F_1(x) - B = \frac{1}{\sqrt{a+x} + \sqrt{a}} - \frac{1}{2\sqrt{a}} = \\ &= \frac{\sqrt{a} - \sqrt{a+x}}{2\sqrt{a}(\sqrt{a+x} + \sqrt{a})} = -\frac{x}{2\sqrt{a}(\sqrt{a+x} + \sqrt{a})^2}; \\ F_2(x) &= \frac{\Phi_1(x)}{x} = -\frac{1}{2\sqrt{a}(\sqrt{a+x} + \sqrt{a})^2}, \\ C &= F_2(0) = -\frac{1}{8a\sqrt{a}} \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

После решения этих примеров можно было бы вернуться к общему исследованию и заняться непосредственным переходом к формуле Маклорена¹⁾, но ставить этот вопрос на рассматриваемом этапе нецелесообразно. За изложенным выше приемом следует переход к получению рядов с помощью «плодотворного правила интегрального исчисления». Мы заимствовали его из статьи Stucke, «Ein fruchtbarer Satz der Differentialrechnung» (Zeitschrift für math. und naturwis. Unterricht 1933, 3-я тетрадь²⁾).

Опустив правило 1-е, относящееся к производной, мы используем лишь правило 2-е (интегрального исчисления): если внутри интервала (a, b)

$$F(x) \geq f(x),$$

то

$$\int_a^b F(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx,$$

причем в последнем случае знак равенства возможен только тогда, когда $F(x) = f(x)$ во всем интервале (a, b) .

Приведем несколько примеров разложения в ряд на основе этого правила.

Разложения $\sin x$ и $\cos x$.

Известно, что для x в интервале $(0, \infty)$

$$x > \sin x. \quad (1)$$

¹⁾ Приведем начало обобщения:

$$A = F(0); B = F_1(0) = \frac{F(0)}{0} = \frac{F(0) - A}{0} = \frac{0}{0}$$

Однако, применяя правило Лопиталья к $B = \left[\frac{F(x) - A}{x} \right]_{x \rightarrow 0}$, находим $B = F'(0)$

и т. д.

²⁾ См. также Кур а н т, Курс дифференциального и интегрального исчисления, ч. I, ГТТИ, 1933, стр. 108, или Б и б е р б а х, Дифференциальное исчисление, стр. 47, или Р. Ф у к с, Введение в анализ в курсе средней школы («Математика в школе», 1926 г.).

После интегрирования этого неравенства в пределах от 0 до x ($x > 0$) получаем:

$$\frac{1}{2} x^2 > 1 - \cos x. \quad (2)$$

К этим функциям применяем то же правило:

$$\sin x > x - \frac{1}{3!} x^3. \quad (3)$$

Продолжая те же рассуждения, находим новое неравенство:

$$1 - \cos x > \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{4!} x^4,$$

или

$$\cos x < 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4. \quad (4)$$

Следующее интегрирование дает:

$$\sin x < x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 \quad (5)$$

и т. д. Неравенства (1), (3), (5), ... замыкают $\sin x$, неравенства (2), (4), ... замыкают $\cos x$ во все более и более тесные пределы, причем это остается в силе для всех значений x в интервале $(0, \infty)$.

Разложение e^x .

Выбираем за исходное неравенство $e^x > 1$, остающееся в силе для x в интервале $(0, \infty)$; если мы перейдем к интегралам, выбрав за пределы интегрирования 0 и x , то получим:

$$e^x > 1 + x.$$

Из этого соотношения вытекают последовательно следующие:

$$e^x > 1 + x + \frac{1}{2!} x^2,$$

$$e^x > 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3$$

и т. д.

Эти неравенства дают последовательность нижних границ для e^x . Чтобы получить и верхние границы, примем во внимание, что

$$e^x < 3;$$

это неравенство имеет силу только в интервале $(0, 1)$, включая сюда верхнюю границу. Применяя наше правило, получаем ряд неравенств:

$$e^x < 1 + 3x,$$

$$e^x < 1 + x + 3 \cdot \frac{1}{2!} x^2,$$

$$e^x < 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + 3 \cdot \frac{1}{3!} x^3.$$

.....

Таким образом мы можем установить для e^x следующие границы:

$$1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n < e^x < 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + 3 \cdot \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1},$$

для x , расположенного в интервале $(0, 1)$. Здесь встречаемся с дополнительным членом, заменяющим остаточный член Тейлора¹⁾.

Разложение $\ln(1+x)$.

Устанавливаем две группы неравенств, справедливых для $x > 0$.

$$\begin{array}{ll} \text{1-я группа} & \text{2-я группа} \\ 1+x > 1 > 1-x^2; & 1 > \frac{1}{1+x} > 1-x; \\ 1+x^3 > 1 > 1-x^4; & 1-x+x^2 > \frac{1}{1+x} > 1-x+x^2-x^3; \\ \dots & \dots \end{array}$$

Неравенства 2-й группы получаются из неравенств 1-й группы делением их членов на $1+x$. Применяя к неравенствам 2-й группы вышеуказанное правило, находим:

$$\begin{aligned} x &> \ln(1+x) > x - \frac{1}{2}x^2, \\ x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 &> \ln(1+x) > x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4. \end{aligned}$$

В том, что наши неравенства справедливы для всех значений $x > 0$, мы не находим противоречия с тем, что ряд сходится только для $x < 1$; в самом деле, наши неравенства сохраняют силу для $x > 1$, но в этом случае появляются границы, не приближающиеся друг к другу, но все дальше и дальше отходящие друг от друга.

Разложение $\operatorname{arctg} x$.

Для того чтобы получить разложение $\operatorname{arctg} x$, нужно воспользоваться теми неравенствами, которыми мы пользовались для получения разложения $\ln x$; следует только x заменить на x^2 .

За недостатком места мы не имеем возможности привести здесь разложение бинома и получение рядов Тейлора и Маклорена с помощью «плодотворного правила интегрального исчисления».

Из просмотренных нами учебников по анализу мы нашли только в книге проф. А. Я. Билибина «Курс математического анализа» (стр. 265—266) вывод формулы Тейлора, основанный на принципе, близком к только что рассмотренному.

¹⁾ Если $0 < x < p$, где p — любое положительное число, то $e^x < 3^p$ и тем же приемом получается неравенство:

$$e^x < 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + 3^p \cdot \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}. \quad (\text{П р и м. р е д.})$$

2. Последовательности и ряды. Постановка вопроса о сходимости рядов. Определение сходимости рядов. Далеко не все авторы курсов математического анализа считают необходимым предпослать теории рядов очерк о последовательностях. Нет нужды обосновывать здесь важность такого очерка для всего последующего рассмотрения рядов (в особенности для рассмотрения сходимости и равномерной сходимости).

Мы ограничимся подчеркиванием значительной роли закона общего члена последовательности (а отсюда вытекает требование достаточной тренировки в решении соответствующих упражнений), ценности геометрических иллюстраций и необходимости приведения в соответствие учений о последовательностях и рядах. Нам кажется, что развитие темы должно идти в духе учебников Бибербаха и Куранта, конечно, с необходимыми сокращениями и с учетом того, что некоторые вопросы (как например понятие предела, аксиома о стягивающейся системе интервалов) должны быть проработаны в предшествующих разделах анализа. Следуя этому порядку, мы приходим вполне естественно к понятию сходимости ряда и к признакам сходимости. Понятие сходимости ряда должно быть самым тщательным образом раскрыто на различных формулировках общего признака сходимости Коши, одного из основных предложений анализа. Если иметь в виду, что далеко не всегда разясняются в вузах и втузах смысл и значение таких понятий, как: 1) необходимое, 2) достаточное и 3) необходимое и достаточное (см., например, проф. Млодзеевский, Введение в анализ), то при рассмотрении общего признака Коши представляется возможность восполнить этот пробел. С этой точки зрения целесообразно использовать следующие учебники и пособия: Бибербах, Гурса, Курант и Валле-Пуссен.

V. Признаки сходимости рядов.

Нельзя признать излишним ни один из 8 признаков (4 признака, основанные на сравнении рядов между собою, частный признак Коши, признаки Даламбера, Раабе и Куммера), излагаемых в книге Валле-Пуссена, так как вся эта совокупность признаков ценна как в теоретическом отношении, так и при применении на практике. Доказательства некоторых из них могут быть заимствованы из курсов Власова и Рощина.

Вполне своевременной является постановка вопроса о сравнительной силе простейших признаков сходимости рядов, как это делает А. В. Грошев (см. «Математическое просвещение», 1935 г., вып. III). Имея в виду, что теорема Лейбница, определяющая очень просто условия сходимости знакопеременных рядов, важна при практическом применении, можно подробнее остановиться на ее доказательстве. Сжатое аналитическое доказательство дает Лоренц (см. Г. Лоренц, Основы высшей математики, т. II, стр. 94). Геометрическое истолкование этой теоремы ясно и убедительно изложено у Бибербаха (см. ч. I, стр. 55—56).

В заключение не лишним будет подчеркнуть, что необходимый, но недостаточный признак сходимости $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ (следствие из общего признака Коши) незаменим в некоторых случаях, как, например, при установлении расходимости следующего ряда:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{n}{n+1} + \dots,$$

так как $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Бывает нередко, что студент, забывая о существовании этого признака, прибегает при решении подобных задач к более долговому и запутанному исследованию.

VI. Абсолютная сходимость рядов; алгебраические операции над рядами.

Равномерная сходимость рядов. Степенные ряды. Операции анализа над рядами. Здесь уместно разъяснить сначала, что при обращении с бесконечными рядами необходима большая осторожность.

Так, например, если возьмем два ряда:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \quad (1)$$

и

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots \quad (2)$$

и введем обозначения:

$$S_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots,$$

$$S_2 = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots,$$

то получим для ряда (1):

$$2S_1 = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 2 + S_1,$$

т. е. $S_1 = 2$, а для ряда (2):

$$2S_2 = 2 + 4 + 8 + 16 + \dots = S_2 - 1,$$

т. е. $S_2 = -1$.

Если первый результат, т. е. $S_1 = 2$, для ряда (1) подтверждается при применении формулы суммы членов бесконечной убывающей геометрической прогрессии, то второй результат (-1) нужно признать абсурдным. Подобные примеры выясняют учащимся, что мы не имеем права производить без оговорок те же действия над бесконечными рядами, какие допускаются для конечных рядов.

Абсолютная сходимость рядов, условно и безусловно сходящиеся ряды и алгебраические операции над рядами (сочетательный и переместительный законы для рядов, сложение и умножение рядов) рассмотрены по нашему мнению с достаточной полнотой и целесообразной последовательностью в курсе Л. Бибербаха (ч. I, стр. 61—71); быть может желательно внести сюда дополнения из книг проф. Власова (хотя бы тщательно разобранный пример $1 - \frac{1}{2} +$

$+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+-\dots$ в связи с перестановкой членов ряда, а также законы сочетательный и переместительный), Валле-Пуссена (сложение и умножение рядов) и Р. Куранта (ч. I, стр. 324 — тот же пример $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+-\dots$). Понятие равномерно сходящихся рядов очень хорошо раскрывается в курсе Л. Бибербаха (ч. II — Интегральное исчисление, стр. 94—98) на примере:

$$x^{\frac{1}{3}} + (x^{\frac{1}{5}} - x^{\frac{1}{3}}) + (x^{\frac{1}{7}} - x^{\frac{1}{5}}) + \dots,$$

что приводит к $s_n = x^{\frac{1}{2n+1}}$ и рассмотрению интервала сходимости степенного ряда (там же, стр. 98—102). Наконец, обзор дифференцирования и интегрирования рядов приведен на стр. 102—108. Если позволяет время, то желательно дополнить изложение Л. Бибербаха примерами из курса Р. Куранта (ч. I, стр. 333—346) или проф. Смирнова.

VII. Ряды Тейлора и Маклорена; остаточные члены.

Из трех основных методов вывода формул Тейлора (Маклорена):

1) применение теоремы о среднем значении к вспомогательной функции;

2) применение формулы интегрирования по частям и

3) использование правил исчисления конечных разностей посредством перехода к пределам (метод, раскрывающий первоначальную цель, которой обязано правило Тейлора своим возникновением) — мы решаемся рекомендовать одновременное применение 1-го и 3-го (имеется в виду знакомство студентов с формулой Ньютона для интерполяции). Подробная характеристика и сущность каждого метода детально очерчены в упомянутой ранее статье Фладта. Напомним вкратце суть 2-го метода:

$$I(x) = \int_0^x f'(x-t) dt.$$

С одной стороны,

$$I(x) = \int_0^x f'(x-t) dt = [-f(x-t)]_0^x = f(x) - f(0),$$

с другой стороны,

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^x f'(x-t) dt = [f'(x-t) \cdot t]_0^x + \int_0^x f''(x-t) \cdot t dt = \\ &= \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{1}{2!} \int_0^x f''(x-t) \cdot t^2 dt = \\ &= \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{1}{3!} \int_0^x f'''(x-t) \cdot t^3 dt = \dots, \end{aligned}$$

поэтому получаем:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots \\ \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + R_n(x),$$

где

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x f^{(n+1)}(x-t) t^n dt.$$

Пусть $x - t = z$. Тогда

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x f^{(n+1)}(z) \cdot (x-z)^n dz = \\ = \frac{1}{n!} \int_0^x f^{(n+1)}(z) \cdot (x-z)^{n-\mu+1} \cdot (x-z)^{\mu-1} dz = \\ = (x-0)^{n-\mu+1} \cdot \frac{f^{(n+1)}(0x)}{n!} \cdot \int_0^x (x-z)^{\mu-1} dz = \\ = \frac{(1-0)^{n-\mu+1} \cdot f^{(n+1)}(0x)}{\mu \cdot n!} \cdot x^{n+1}.$$

Полагая $\mu = n + 1$, получаем остаточный член в форме, данной Лагранжем; при $\mu = 1$ — остаточный член в форме Коши.

Для получения формулы Тейлора мы принимаем:

$$I(x) = \int_0^{x-a} f'(x-t) dt$$

и, пользуясь опять-таки формулой интегрирования по частям, получим:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots \\ + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n(x),$$

где

$$R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{x-a} f^{(n)}(x-t) t^{n-1} dt$$

остаточный член в интегральной форме.

Об использовании остаточного члена в интегральной форме см. Д. Скарборо. Численные методы математического анализа, ГТТИ, 1934, стр. 40 — пример: найти остаточный член в разложении $\ln(x+h)$.

Из $R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{x-a} f^{(n)}(x-t) t^{n-1} dt$ путем замены: $x-t = z$

и соответствующих преобразований получим остаточные члены в формах, данных Лагранжем и Коши.

3-й метод получения формулы Тейлора, в котором за исходное положение берут интерполяционную формулу Ньютона, прекрасно изложен в книге Ф. Клейна «Элементарная математика с точки зрения высшей», т. I, ГТТИ, 1933, стр. 343—349. Там же он отмечает «неслыханный по своей смелости предельный переход» (одновременно $\Delta x \rightarrow 0$ и $n \rightarrow \infty$), который применил Тейлор.

Наконец, нужно всемерно рекомендовать то наглядное выяснение всего материала, относящегося к формуле Тейлора, которое имеется в книге Ф. Клейна (стр. 333—337).

VIII. Роль и место рядов в математике.

1. «Большое теоретическое и практическое значение имеет вопрос, можно ли заданную функцию $f(x)$ приближенно представить или, как говорят, аппроксимировать, с помощью рациональных и в особенности с помощью целых рациональных функций» (Р. Курант).

2. «Формула Тейлора дает нам возможность более точно изучить ход изменения некоторой функции $f(x)$ в окрестности значения $x = a$ или поведение заданной кривой в окрестности некоторой точки» (Р. Курант).

3. Формула Тейлора применяется к теории *extrema*, при доказательстве иррациональности e , для определения предельных значений неопределенностей и связана с задачей интерполирования.

4. Другие области применения формулы Тейлора: исчисление ошибок, вычисление π .

5. Приложения бесконечных рядов: приближенное интегрирование, сходимость несобственных интегралов, вычисление длины дуги эллипса в опытных науках (теория упругости, электродинамика).

6. Мы не можем здесь касаться рядов Фурье и аналитических функций.

Б И Б Л И О Г Р А Ф И Я

УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ ПО МАТЕМАТИКЕ.

Настоящая библиография является отчасти продолжением «Библиографии математической литературы», изданной Научно-исследовательским критико-библиографическим институтом и содержащей книги и журнальные статьи вышедшие с 1/I 1930 г. по 1/VI 1934 г., с предисловием О.Ю. Шмидта, М.—Л., 1934. Здесь приводятся, кроме сочинений, пропущенных в вышеупомянутой книге, книги и журнальные статьи по элементарной и началам высшей математики, вышедшие с 1/VI 1934 г. по 1/I 1935 г. Вследствие небольшого числа книг и статей они распределены в 9 отделах и расположены в алфавитном порядке по авторам. Статьи по методике математики в список не включены. Из иностранной математической литературы помещены некоторые, имеющие общее значение книги и статьи, вышедшие в 1934 г. Сокращения:

- Б. С. Э.** — Большая советская энциклопедия.
- Д.** — Доклады Академии наук СССР.
- Ж.** — «Журнал Института математики Украинской акад. наук». Киев.
- Ж. Э.** — «Журнал экспериментальной и теоретической физики».
- З. Г.** — «Записки Ленинградского горного института».
- И. А. Н.** — «Известия Академии наук СССР».
- И. У.** — «Известия Уральского лесотехнического института».
- И. Ц.** — «Известия Центрального Научно-исслед. маркшейдерского бюро».
- М. П.** — «Математическое просвещение», сборники.
- М. С.** — «Математический сборник».
- М. Ф.** — «Математика и физика в средней школе». Методический сборник.
- Н.** — «Научно-технический сборник Электротехнического института связи». Ленинград.
- П.** — «Природа».
- П. З. М.** — «Под знаменем марксизма».
- С.** — «Социалистическая реконструкция и наука».
- Т.** — «Труды Института истории науки и техники».
- Т. А.** — «Труды Азербайджанского строит. ин-та им. Горького».
- Т. К.** — «Труды Казанского химико-технического ин-та им. Бутлерова».
- Т. Л. П.** — «Труды Ленинградского института инженеров промышл. строительства».
- Т. М.** — «Техника молодежи».
- Т. Ц.** — «Труды Центрального аэродинамического ин-та». Москва.
- У.** — «Ученые записки Ростовского государственного университета».
- У. К.** — «Ученые записки Казанского университета».
- У. М.** — «Ученые записки Московского государственного университета».
- Ф. Н. Т.** — «Фронт науки и техники».
- Э.** — «Элементарная математика в средней школе». Непериодический сборник. Ленинград. 1934.

1. ОСНОВЫ МАТЕМАТИКИ.

Александров П., О новых течениях математической мысли, возникших в связи с теорией множеств, **Ф. Н. Т.**, 1934, № 5—6.

Арнольд И., Число, **Б. С. Э.**, т. 61.

Гливленко В., Кризис основ математики, **Ф. Н. Т.**, 1934, № 5—6.

Гливленко В., Понятие дифференциала у Маркса и Адамара, **П. З. М.** 1934, 5.

- Голубев В., Математика и техника, Ф. Н. Т., 1934, № 5—6.
- Гребенча М., Число e и его значение в естествознании и технике, М. Ф., 1934. Автор приводит примеры из теории процентов, формулы барометра, закона Ньютона, распада радия, роста клеток.
- Колмогоров А., Современная математика, Ф. Н. Т., 1934, № 5—6.
- Кольман Э., О злободневном значении теории вероятностей, П. З. М., 1934, № 2.
- Курош А., Современные алгебраические воззрения, Ф. Н. Т., 1934, № 5—6.
- Купрадзев В. Д. Заметки о французской математике (к декаде франко-советского культурного сближения), П., 1934, № 6.
- Стрьюк Д. Дж., К обоснованию теории вероятностей, П. З. М., 1934, № 2.
- Содержание: Введение. Формальная теория. Экспериментальные факты. «Равновозможность». Теория частости. Динамика. Эргодический принцип. Замечания и выводы. Причинность как результат статистики. Добавление к теории меры. Список литературы.
- Фишер А., Философия математики Гонсета, П. З. М., 1934, № 5.
- Содержание: Геометрия. Арифметика. Истинность математики и логика.
- Шнирельман Л., Теория чисел и ее связь с другими отделами математики, Ф. Н. Т., 1934, № 5—6.
- Яновская С., Идеализм и математика, Ф. Н. Т., 1934, № 5—6.
- Black M., Nature of mathematics, N. Y. 1934, 219 стр.
- Hilbert D. und Bernays P., Grundlagen der Mathematik. B. I, Berlin 1934, 471 стр.

2. ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ.

- Александров П., Математическая жизнь Москвы, Ф. Н. Т., 1934, № 5—6.
- Ахмед, Гюйгенс, Ламберт, Лежандр, О квадратуре круга. Перев. с нем. под ред. и с примеч. С. Н. Бернштейна. Серия: Классики естествознания, М.—Л. 1934.
- Содержание: Рудио Р., Обзор истории задачи о квадратуре круга от древности до наших дней (стр. 9—95); Ахмед, Измерение круга; Гюйгенс Х., О найденной величине круга; Ламберт И. Г., Предварительные сведения для ищущих квадратуру и спрямление круга; Лежандр А. М., Доказательство того, что отношения окружности к диаметру и его квадрату суть иррациональные числа. На стр. 65, в статье Рудио, находится число π , вычисленное Дазе с 200 десятичными знаками.
- Гессен Б. М., Социально-экономические корни механики Ньютона. Доклад на Втором всесоюзном матем. съезде, М.—Л. 1934.
- Гуревич Г., Международная конференция по тензорной дифференциальной геометрии, С., 1934.
- Дубнов Я., Международная конференция по тензорной дифференциальной геометрии, Ф. Н. Т., 1934, № 5—6.
- Колмогоров А., Второй всесоюзный математический съезд, С., 1934, № 7.
- Колмогоров А., Институт математики и механики МГУ, Ф. Н. Т., 1934, № 5—6.
- Купрадзев В. Д., Некоторые итоги Второго всесоюзного съезда математиков, П., 1934, № 9.
- Лобко И. А., Из истории установления метрических мер, М. Ф., 1934, № 1.
- Лурье С. Я., Приближенные вычисления в древней Греции, Т. Сер. I, вып. 4, Л. 1934.
- Молодой В., Второй всесоюзный математический съезд, М. Ф., 1934, № 3.
- Сегал Б. И., Ожившие формулы. Второй всесоюзный математический съезд, «Вечерняя Москва», 27/VI 1934 г.
- Смирнов В., Второй всесоюзный математический съезд, Ф. Н. Т., 1934, № 8.
- Таннери П., Очерки по истории естествознания в новое время, М.—Л. 1934.

Ч в а л и н а А., Архимед, М.—Л. 1934. С портретом Архимеда. Перев. с нем. В. И. Контовт.

С о д е р ж а н и е: 1. Жизнь Архимеда. 2. Значение Архимеда. 3. Алгебра. 4. Геометрия. 5. Механика. 6. Исчисление песчинок. Приложение: образцы текстов из сочинений Архимеда.

Ч и с т я к о в И., О новейших исследованиях в области древнейшей истории математики, М. Ф. 1934, № 1, 2, 3. О работах проф. Нейгебауэра (Геттинген) и В. В. Струве по истории халдейской математики.

Э й г е с А., Московское математическое общество, Ф. Н. Т., 1934, № 5—6.

Ю ш к е в и ч А., Цифры, Б. С. Э., т. 60.

Smith and J. Ginsburg, A history of mathematics in America before 1900, 1934, 209 стр.

3. АЛГЕБРА.

А г е е в Д. В., Обобщение метода Ньютона вычисления корней уравнения, Н. 1934.

Б а у м г а р т н е р Л., Теория групп, М.—Л. 1934. Пер. с нем. В. И. Контовт под ред. С. А. Чунихина.

С о д е р ж а н и е: Краткое введение в теорию групп. Введение понятия группы. Понятие группы в геометрии. Конечные группы. Бесконечные группы. 48 задач с решениями.

Г е к к е Э., Теория алгебраических чисел. Харьк.—Киев (укр. яз.). Пер. с нем. В. В. Никишова под ред. проф. А. К. Сушкевича.

Д у б и н С. В., К теории аффинных полей, И. У., 1934, № 3.

И д е л ь с о н Н., Численное решение уравнений, Б. С. Э., т. 61.

К а р а м з и н П. В., Номографическое решение уравнений третьей степени Т. А., 1934, № 1.

К р е е р Л. И., Приближенное вычисление вещественных корней алгебраических уравнений (гонометрический метод.), М. С., т. 41: 2, М.—Л. 1934. Переработка статей автора в Изв. Горский педаг. ин-та, г. Орджоникидзе, т. 5, 1928 и 7, 1930 г.

С о д е р ж а н и е: Трехчленные уравнения. Уравнения с любым числом членов. Четырехчленные уравнения. Таблицы и примеры.

К р е е р Л., Алгебраические уравнения, М. Ф., 1934, № 2.

Автор приводит новый способ вычисления корней трехчленных уравнений, исходя из тождества $\sec^2 \alpha - \tg^2 \alpha = 1$, при помощи функций: $S(\alpha) = \frac{\lg \tg \alpha + h}{\lg \sec \alpha}$.

С о д е р ж а н и е: Виды трехчленных уравнений. Тригонометрические подстановки. Функция $S(\alpha)$. Число вещественных корней трехчленных уравнений. Интерполирование угла. Описание употребления таблиц. Вычисление корней. Примеры и таблицы.

Л е в и н О., Обобщение теоремы Гельдера, У., 1934, № 1, Ростов-на-Дону.

П е р е л ь м а н Я. И., Занимательная алгебра, 2-е изд., исправл. и дополн., Л.—М. 1934.

С о д е р ж а н и е: Пятое математическое действие. Язык алгебры. В помощь арифметике. Диофантовы уравнения. Шестое математическое действие. Уравнения 2-й степени. Прогрессии. Седьмое математическое действие — логарифмы.

С е г е л ь М. М., Приближенное решение уравнений с помощью логарифмической линейки, Т. К., 1934, № 2.

Су ш к е в и ч А. К., Э. Галуа и теория групп, П. 1934, № 4.

Ч е б о т а р е в Н., Идеалы, Б. С. Э., т. 27.

Ч е б о т а р е в Н., Заметка по алгебре, У. К., 1934, 7.

Ч и с т я к о в И., Несколько замечаний о прогрессиях, М. Ф., 1934, № 1. Вывод некоторых формул для арифм. и геометрич. прогрессий.

Ш м и д т О. Ю., Высшая алгебра, вып. 1. Начала теории определителей, М 1934.

Ш р е й е р-Ш п е р н е р, Введение в линейную алгебру в геометрическом изложении, ч. 1, М.—Л. 1934. Перев. с нем. Г. Ольшанского.

С о д е р ж а н и е: Аффинное пространство. Линейные уравнения. Эвклидово пространство. Теория определителей. Теория полей. Основная теорема алгебры. 80 задач.

Эпштейн М., О знаке величины определителя системы нормальных уравнений, И. Ц., 1934, № 1.

Hardy G. H., Littlewood I. E., Polya G., Inequalities, Lond. 1934.

Содержание: Теория неравенств. Три основных неравенства: среднее геометрическое и среднее арифметическое, неравенства Гельдера и Минковского. Положительный отзыв проф. В. В. Степанова. Иностран. книга, 1935, № 2.

Hasse H., Über gewisse Ideale in einer einfachen Algebra, Paris 1934.

Таннака Т., Japanese Journ. of Math., 1934, № 10. Работа по теории Галуа.

4. АРИФМЕТИКА.

Брадис В. М., Теория и практика вычислений. Для педаг. инст., Баку 1934 (турецкий яз.).

Перельман Я. И., Занимательные задачи, 3-е изд., дополн., с рис.. Л. 1934.

Содержание: Задачи со спичками. Вес и взвешивание. Задачи о часах. Путевые задачи. Числовые головоломки. Размещения и перестановки. Непрерывное рисование. Лабиринты и др.

Перельман Я. И., Занимательная арифметика, М.—Л. 1934.

Чайа Т., Краткий курс исчисления процентов, Тифлис 1934, 140 стр. (груз. яз.).

5. ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ.

А. В., Геометрическое доказательство теоремы Вильсона, М. П., 1934, № 1.

А. В. Об одной формуле. М. П. 1934, № 1. Об одном неопределенном уравнении и формуле, связывающей числа e и π . Приводится доказательство, принадлежащее А. Кэли.

Бухстаб А., Чисел теория, Б. С. Э., т. 61.

Костровицкий И., Общие признаки делимости, М. Ф., 1934, 3. О признаках делимости на числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и на простые числа. Предлагается для решения 28 задач.

Кошляков Н. С., Некоторые тождества из аналитической теории чисел, Д., 1934, № 6.

Папков П. С., Алгоритм Евклида в произвольной квадратичной области, У., 1934, вып. 1.

Романов Н. П., Об одной теореме аддитивной теории чисел, У. М., 1934, вып. 2. Автор показывает, что в интервале $(0, x)$, где $x > 2$, находится больше αx чисел вида $a^2 + p$, где p — простое число, $\alpha > 0$.

Сегал Б. И., Проблема Варинга в теории чисел, П., 1934, № 2.

Содержание: О различных задачах из теории чисел. Задача Варинга. Работы Лиувилля, Гильберта, Ландау, И. М. Виноградова и автора.

Скопин И. А., О распределении дробных частей системы целых многочленов, И. А. Н., 1934.

Сулаквелидзе К., Теория чисел, Тифлис 1934 (груз. яз.).

Хинчин А. Я., Великая теорема Ферма, 3-е изд., М.—Л. 1934. С портр. П. Ферма.

Содержание: Постановка задачи. Указания на метод. Формулы индусов. Доказательский очерк. Свойства натурального ряда. О делимости чисел. Числовые функции. Свойства сравнений. Теоремы Ферма, Эйлера и Вильсона. Решение сравнений. Символ Лежандра. Лемма Гаусса. Закон взаимности. Степенные вычеты. Понятие об индексе. Задачи.

Чистяков И. И., Теория чисел. Программы-задания для заочных педагогических институтов, вып. 63, М. 1934.

Содержание: Начала элементарной теории чисел. Список литературы. Исторический очерк. Свойства натурального ряда. О делимости чисел. Числовые функции. Свойства сравнений. Теоремы Ферма, Эйлера и Вильсона. Решение сравнений. Символ Лежандра. Лемма Гаусса. Закон взаимности. Степенные вычеты. Понятие об индексе. Задачи.

Bouyges, Divisibilité par les nombres premiers. La Nature, 1934, стр. 33

Santaló E., Carres magiques au degré N. Paris 1934, 192 стр.

Erdős P. et Turán P., On a problem in the elementary theory of numbers, «Amer. Math. Monthly», 1934, 41.

Н у р т а Н., A problem in diofantine analysis, «Amer. Journ. of math.», 1934, LVI, 3. Об уравнении $\prod_{x=1}^n N_x = \prod_{y=1}^n M_y$.

Л о о К е н г Н у а, Nota of Pell's equation, «The tohoku Math. Journ.», 1935, v. 40. $x = \text{ch } \phi$, $y = D^{-\frac{1}{2}} \text{sh } \phi$ — решения для $x^2 - Dy^2 = 1$.

З е р м е л о Е., Elementare Betrachtungen zur Th orie der Primzahlen, «Nachr. Ges. Wiss. Göttingen», I, N. F. 1, 1934.

С о д е р ж а н и е: Новое доказательство единственности разложения натурального числа на простые множители.

6. АНАЛИЗ.

А к и м о в Н. И., К вопросу о разложении данной функции в ряд по полиномам Якоби, З. Г., 1934, 8.

Б р у с и л о в с к и й Г. К., Единая схема вычисления частного интеграла линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и особенной правой частью, М. П., 1934, 1. Приведен улучшенный метод неопределенных коэффициентов.

Г а г а е в Б., Шаровые функции, Б. С. Э., т. 61.

Г р   н в и л ь В. и Н. Л у з и н, Курс дифференциального и интегрального исчисления, ч. I. Дифференциальное исчисление, 14-е изд., М.—Л. 1934. То же, ч. II. Интегральное исчисление, М.—Л. 1934. В приложении дано доказательство основной теоремы интегрального исчисления (Лемма Лебега).

Ж е г а л к и н И. И. и М. И. С л у д с к а я, Систематический сборник, задач по интегральному исчислению, М.—Л. 1934. 560 задач с решениями.

И д е л ь с о н Н., Численное интегрирование, Б. С. Э., т. 61.

К р у к о в с к и й Б. В., О числах, подобных числам Бернулли и Эйлера. Тангенциальные числа, Ж., 1934, 1 (укр. яз.).

К у д р я в ц е в В. А., Общая формула для производной n-го порядка степени некоторой функции, М. П., 1934, 1. Статья является дополнением к работе Perron'a-Schwatt'a.

Л а п п о - Д а н и л е в с к и й И. А., Теория функций от матриц и системы линейных дифференциальных уравнений, М.—Л. 1934. Приложение теории определителей к математической физике.

Л у р   е И. А., Основы высшей математики, ч. 2-я, М.—Л. 1934. Пособие для вузов.

С о д е р ж а н и е: Начала интегрального исчисления. Ряды. Аналитическая геометрия в пространстве. Функции нескольких переменных. Некоторые сведения из высшей алгебры. Интегрирование функций. Интегрирование дифференциальных уравнений. Кратные интегралы.

М а н д е л ь ш т а м Л. И. и П а п а л а н с и Н. Д., Об основах одного метода приближенного решения дифференциальных уравнений, Ж. Э., 1934, т. 4, 2.

М о р д у х а й - Б о л т о в с к о й Д., О трансцендентных числах с последовательными приближениями, определяемыми алгебраическими уравнениями, М. С., т. 41, 2, М. Л. 1934. В статье приводится условие трансценгентности Liouville'a: если $\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}$ для всякого n при достаточно большом q , то x — трансцендентное число.

Н е к р а с о в А. И., Об одном классе линейных интегро-дифференциальных уравнений, Т. Ц., 190, М. 1934.

П а п и т а ш в и л и Г., Практические занятия по высшей математике. Теория вероятностей и дифференциальное исчисление. Для вузов и заочных институтов, Тифлис 1934 (груз. яз.).

П о п о в А. И., О некоторых рядах, Д., 1934, IV, 7. О новых рядах, основанных на теории з та-функций.

П о с с е К., Курс дифференциального исчисления, М.—Л. 1934.

П о с с е К., Курс интегрального исчисления. Переработ. И. И. Приваловым, М.—Л. 1934.

П р и в а л о в И. И., Ряды Фурье, 3-е изд., М.—Л. 1934. Книга содержит теорию рядов Фурье и их приложения к математической физике и теории упругости. В приложении дан очерк почти-периодических функций.

С б о р н и к з а д а ч п о в ы с ш е й м а т е м а т и к е под редакцией Н. М. Гюнтера и Р. О. Кузьмина, ч. 2, изд. 9-е, М.—Л. 1934.

С м и р н о в В. И., Курс высшей математики для техников и физиков, 5-е изд., т. 2, М.—Л. 1934. Комплексные числа. Дифференциальные уравнения. Определенные и кратные интегралы. Основы дифференциальной геометрии. Ряды Фурье. Математическая физика.

С м и р н о в В. И., Курс высшей математики для техников и физиков, т. 1, изд. 7-е, М.—Л. 1934. Дифференциальное и интегральное исчисление. Бесконечные ряды. Аналитическая геометрия. Начала векторного анализа.

С м и р н о в В. И., То же, т. 3, 2-е изд., М.—Л. 1934. Основы высшей алгебры. Теория функций комплексного переменного. Аналитическая теория линейных дифференциальных уравнений. Специальные функции. Приведение матриц к канонической форме.

Ф р а н к М. Л., Элементы высшей математики, М.—Л. 1934, 638 стр. Книга для техникумов и самообразования.

С о д е р ж а н и е: Переменные величины и функциональная зависимость. Дифференцирование и интегрирование алгебраических функций. Рациональные алгебраические функции. Неявные и иррациональные функции. Интегрирование. Трансцендентные функции. Интегральное исчисление и его приложения. Исследование кривых. Приближенное представление функций помощью полиномов. Дифференциальные уравнения и их интегрирование. Функции многих переменных. П р и л о ж е н и я: 1. Комплексные числа. Понятие о векторном исчислении. Дополнительные примеры и задачи. Всего 205 задач с решениями. В отделе справочных данных помещены: 1. Список важнейших формул. Элементы алгебры и тригонометрии и высшей математики. 2. Некоторые кривые и их уравнения; параболы различных порядков, кривые поллитропические, третьего и четвертого порядков, лепестковые, Лисажу, трохойды, спирали, некоторые трансцендентные и семейства кривых.

Э й л е р Л., Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами maximum'a либо minimum'a, или решение изопериметрической задачи (1744), М.—Л. 1934.

F e r m a t P., Abhandlungen über Maxima und Minima, Leipzig 1934.

C o n k w r i g h t N., Differential equations, London 1934.

D o c k e r e y N., An elementary treatise on pure mathematics, London 1930, 580 стр.

E r d ö s P., A theorem of Sylvester and Schur, «The Journ. of the London Society», 1934, 36. Автор приводит обобщение теоремы-постулата Bertrand'a-Чебышева: между n и $2n - 2$ находится при $2n > 7$ по крайней мере одно простое число.

L a n d a u E. Einführung in die Differentialrechnung und Integralrechnung. Gruningen 1934, 368 стр.

L o v e C., Differential and integral calculs. 3 ed., N.-Y. 1934.

S a n s o n e G., Lezioni di analise matematica, v. 1, Padova 1934.

(Продолжение указателя будет помещено в седьмом сборнике.)

(Все задачи этого отдела были предложены на приемных экзаменах во французских высших школах. См. подробнее в сборнике № 6.)

ГЕОМЕТРИЯ И ТРИГОНОМЕТРИЯ.

105. 1. Дан неподвижный отрезок $AB = a$. Квадрат $APNM$ вращается вокруг вершины A в положительном направлении, изменяясь при этом так, что

$$AN^2 = BM^2 + BP^2.$$

а) Найти геометрические места центра J квадрата $APNM$, а также его вершин M, N, P .

б) Определить положение квадрата, если сторона PN (или ее продолжение) проходит через заданную точку C . Какой кривой касается PN в любом положении?

2. Решить те же вопросы (а и б), если размеры квадрата изменяются так, что сумма квадратов расстояний от точки B до четырех вершин квадрата постоянная и равна $10AB^2 = 10a^2$.

106. Даны две окружности радиусов R и R' с центрами в точках O и O' ($OO' = d$), пересекающиеся в точках A и B .

Точка P описывает окружность O . M и N — точки пересечения хорд PA и PB с окружностью O' .

1. Определить огибающую MN .

2. Определить геометрическое место центра круга, описанного вокруг треугольника PMN , геометрическое место точки пересечения его высот и геометрическое место его центра тяжести.

3. Определить положения точки P на окружности O , при которых

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB}.$$

4. Определить положения точки P , при которых окружность около треугольника PMN пересекает окружности O и O' под равными углами; вычислить величину этих углов.

107. В треугольнике OAB

$$OA = a, \quad OB = b, \quad \angle AOB = \alpha.$$

Проведем прямую $z'z$ через точку O , перпендикулярную к плоскости треугольника OAB .

1. Показать, что для всякой точки C прямой $z'z$ можно найти другую точку D той же прямой так, что противоположные ребра тетраэдра $ABCD$ окажутся попарно перпендикулярными.

Определить зависимость между OC и OD .

Найти геометрические места оснований высот этого тетраэдра, а также геометрическое место центра сферы, описанной около этого тетраэдра.

2. Считая угол α острым, найти положение точек C и D , при котором объем тетраэдра достигает минимума. Вычислить этот объем и радиус сферы, описанной около тетраэдра.

108. Даны окружность с центром в O и точки B и C на окружности. Точка A движется по этой окружности. H — точка пересечения высот треугольника ABC .

1. Определить геометрическое место точки пересечения медиан треугольника AON .

2. Определить геометрическое место основания внутренней биссектрисы D угла A треугольника AON .

3. Определить положение точки A , при котором биссектриса AD имеет заданную длину.

109. Точка A передвигается по заданной полуокружности с диаметром BC . AN — высота прямоугольного треугольника ABC , O и O' — центры кругов, вписанных в ANB и ANC .

Доказать, что перпендикуляр, опущенный из A на OO' , проходит через некоторую неподвижную точку.

110. Рассмотрим семейство сфер, касательных к данной плоскости P , в данной точке A .

Дана прямая OX , перпендикулярная к плоскости P .

Доказать, что точки касания рассматриваемых сфер с касательными плоскостями к ним, проходящими через OX , расположены на конусе вращения, сфере и цилиндре вращения. Найти эти поверхности.

111. В треугольнике ABC даны: сторона a , радиус r вписанного круга и радиус r' внеписанного круга, вписанного в угол A .

1. Вывести формулы:

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{a}{r}, \quad \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{r}{r'}.$$

2. Выразить $\operatorname{tg} \frac{A}{2}$ через a , r и r' . Какому неравенству должны удовлетворять a , r и r' , чтобы можно было, пользуясь этими величинами, вычислить тангенсы половин углов треугольника?

3. Вычислить угол A , если $r = \frac{a}{4}$, $r' = \frac{a}{3}$.

112. На окружности, описанной вокруг треугольника ABC , выберем произвольную точку M . Обозначим через MA , MB и MC расстояния от точки M до вершин A , B и C , а через MD , ME , MF — расстояния от точки M до сторон BC , AC , AB .

Доказать, что:

$$MA \cdot MD = MB \cdot ME = MC \cdot MF.$$

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.

44. Исследовать сходимость ряда:

$$1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{x}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n} + \dots \quad (1)$$

Заметим прежде всего, что ряд не имеет смысла при $x = k\pi$, где k — любое целое число. Действительно, в этом случае найдется в ряде (1) член вида:

$$\operatorname{tg} \left(n\pi + \frac{\pi}{2} \right) = \operatorname{tg} \left(\pm \frac{\pi}{2} \right).$$

При всех остальных (не кратных π) значениях x ряд (1) сходится. Действительно,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2^{n+1}}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2^{n+1}} \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2^{n+1}} \right)}{4 \operatorname{tg} \frac{x}{2^{n+1}}} = \frac{1}{4} \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2^{n+1}} \right)$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{4} < 1.$$

45. Найти предел произведения:

$$\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cos \frac{x}{2^4} \dots \cos \frac{x}{2^n} \dots$$

при неограниченном возрастании n .

Очевидно,

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{x}{4} + \cos \frac{3x}{4} \right); \\ \Pi_3 &= \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cos \frac{x}{2^4} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{8} + \cos \frac{3x}{4} \cos \frac{x}{8} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(\cos \frac{x}{8} + \cos \frac{3x}{8} + \cos \frac{5x}{8} + \cos \frac{7x}{8} \right). \end{aligned}$$

Вообще

$$\begin{aligned} \Pi_n &= \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cos \frac{x}{2^4} \dots \cos \frac{x}{2^n} = \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \left(\cos \frac{x}{2^n} + \cos \frac{3x}{2^n} + \cos \frac{5x}{2^n} + \dots + \cos \frac{(2^n-1)x}{2^n} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Помножим и разделим правую часть равенства (1) на $\sin \frac{x}{2^n}$:

$$\Pi_n = \frac{1}{2^{n-1} \sin \frac{x}{2^n}} \left[\cos \frac{x}{2^n} \sin \frac{x}{2^n} + \cos \frac{3x}{2^n} \sin \frac{x}{2^n} + \dots + \cos \frac{(2^n-1)x}{2^n} \sin \frac{x}{2^n} \right],$$

откуда

$$\Pi_n = \frac{1}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} \left[\sin \frac{2x}{2^n} + \sin \frac{4x}{2^n} - \sin \frac{2x}{2^n} + \sin \frac{6x}{2^n} + \dots + \sin x - \sin \frac{2x}{2^n} \right]$$

или

$$\Pi_n = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x \sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x}.$$

Таким образом произведение сходится к $\frac{\sin x}{x}$.

Если $x = k\pi$, где $k \neq 0$ — любое целое число, произведение обращается при некотором n в нуль и при дальнейшем возрастании n остается равным нулю.

Если $x = 0$, произведение постоянно и равно единице.

46. Найти плоскую кривую, нормали к которой проходят через заданную точку.

Примем заданную точку за начало координат.

Уравнение нормали к искомой кривой в точке (x, y) :

$$X - x + y'(Y - y) = 0. \quad (1)$$

Эта нормаль должна проходить через начало координат; следовательно, свободный член в уравнении (1) должен равняться нулю при любых x и y : $x + y'y = 0$, или $x dx + y dy = 0$.

Интегрируя, найдем $x^2 + y^2 = C$ — семейство концентрических окружностей с центром в заданной точке.

Д. М. Синцов (Харьков)

47. Определить полином $f(x)$ 5-й степени, который удовлетворяет тождеству:

$$5f(x) = (x-1)f'(x) + x^3 - 2x + 3 \quad (1)$$

и который равен нулю при $x=2$.

В редакцию поступило два решения. Одно из них — обычным методом неопределенных коэффициентов. Второе решение, принадлежащее проф. Д. М. Синцову (Харьков), приводим здесь.

Положим $x-1=t$, т. е. $x=t+1$. Тогда $x^3 - 2x + 3 = t^3 + 3t^2 + t + 2$, и уравнение (1) примет вид:

$$5y = ty' + t^3 + 3t^2 + t + 2 \quad (2)$$

[где $y = f(x) = \varphi(t)$]. Рассмотрим уравнение (2) без членов, свободных от неизвестной функции:

$$5y = ty'; \quad \frac{y'}{y} = \frac{5}{t}; \quad y = Ct^5.$$

Применим теперь метод вариации постоянной:

$$y' = 5Ct^4 + \frac{dC}{dt}t^5.$$

Уравнение (2) даст для определения C :

$$\frac{dC}{dt} = -\frac{1}{t^3} - \frac{3}{t^4} - \frac{1}{t^5} - \frac{2}{t^6},$$

отсюда

$$C = \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{t^3} + \frac{1}{4t^4} + \frac{2}{5t^5}.$$

Следовательно, искомая функция имеет вид:

$$y = C_1t^5 + \frac{1}{2}t^3 + t^2 + \frac{1}{4}t + \frac{2}{5}. \quad (3)$$

Но при $x=2$, т. е. при $t=1$, $y=0$. Из этого условия определяем $C_1 = -\frac{43}{20}$ и, подставив в выражение (3) $C_1 = -\frac{43}{20}$ и $t = x-1$, найдем искомый многочлен:

$$f(x) = -\frac{43}{20}x^5 + \frac{43}{4}x^4 - 21x^3 + 21x^2 - 11x + \frac{14}{5}.$$

Д. М. Синцов (Харьков), Горохов (Кадиевка)

48. Показать, что полином

$$x^{pa} + x^{pb+1} + x^{pc+2} + \dots + x^{pl+p-1} \quad (1)$$

делится на

$$x^{p-1} + x^{p-2} + x^{p-3} + \dots + x + 1, \quad (2)$$

если p, a, b, c, \dots, l — целые числа.

Приравняем нулю полином (2) и умножим обе части получившегося равенства на $(x-1)$. Получим:

$$x^p - 1 = 0.$$

Отсюда

$$x_k = \cos \frac{2\pi k}{p} + i \sin \frac{2\pi k}{p} \quad (k = 1, 2, \dots, p-1).$$

При $k=0$ имеем постороннее решение, внесенное нами умножением на $(x-1)$.

Все найденные нами $(p-1)$ значений x удовлетворяют условию $x^p = 1$. Очевидно, многочлен (2) можно записать в виде:

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_{p-1}). \quad (3)$$

Далее ясно, что

$$x_k^{pm+t} = (x_k^p)^m \cdot x^t = 1 \cdot x^t = x^t;$$

$$x_k^{pa} + x_k^{pb+1} + x_k^{pc+2} + \dots + x_k^{pl+p-1} = 1 + x_k + x_k^2 + \dots + x_k^{p-1} = 0,$$

т. е. все значения x обращают в нуль и многочлен (1), а это значит, что многочлен (1) делится на все $(x - x_k)$, следовательно, и на их произведение (3), т. е. на многочлен (2), что и требовалось доказать.

49. Исследовать кривую $y = x^y$, в частности, для отрицательных значений y .

Записав уравнение кривой в виде $x = \sqrt[y]{y}$, исследуем его для положительных y обычными методами дифференциального исчисления. Найдем, что $\frac{dx}{dy}$ отрицательно при $y > e$ и положительно при $y < e$. При $y = e$ величина x достигает максимума. Заметив, что $\lim_{y \rightarrow 0} x = 0$ и $\lim_{y \rightarrow \infty} x = 1$, можем построить кривую для $y > 0$.

При $y < 0$ функция $x = \sqrt[y]{y}$ не является непрерывной.

При $y < 0$ четных отрицательных x — мнимое.

При $y < 0$ нечетных отрицательных x — отрицательное действительное.

Если y — несократимая дробь с четным числителем, x — мнимое.

Если y — несократимая дробь с нечетными числителем и знаменателем, x — отрицательное действительное.

При y — иррациональном значении x из формулы $x = \sqrt[y]{y}$ не определяется.

Доопределить функцию x на иррациональных точках невозможно, так как функция x , определенная на множестве рациональных y , везде разрывна.

50. Вывести уравнение сферы, проходящей через окружность пересечения данной сферы радиуса R с плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$ и через начало координат.

Уравнение данной сферы $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - R^2 = 0$. Уравнение искомой сферы:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - R^2 + \lambda(Ax + By + Cz + D) = 0. \quad (1)$$

Но искомая сфера должна проходить через начало координат; следовательно, свободный член в уравнении (1) должен быть равен нулю:

$$\lambda D - R^2 = 0,$$

откуда

$$\lambda = \frac{R^2}{D},$$

и уравнение (1) принимает вид:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - R^2 + \frac{R^2}{D}(Ax + By + Cz + D) = 0$$

или

$$D[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - R^2] + R^2(Ax + By + Cz + D) = 0.$$

Синцов (Харьков)

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

И. А. Бегенев—О решении неопределенного уравнения $ax + by + cz = d$ в целых числах	3
С. И. Зетель—О делении сторон треугольника пропорционально n —м степеням прилежащих сторон	6
Р. Н. Бончковский—Теорема Эйлера о многогранниках	9
Л. С. Хренов—Вычисление площадей многоугольников по способу Саррона	12
Н. Г. Чудakov—Что известно в настоящее время о простых числах	16
В. Н. Кравченко—Применение рядов к решению уравнений	22
А. М. Басанец—Гармонический знакпеременный ряд	32
М. С. Бритман—Остаточный член формулы Тейлора в форме Д'Оканя	41
М. С. Бритман—Об остаточном члене формулы Тейлора	44
М. Л. Франк—О некоторых простых по форме алгебраических кривых весьма высокого порядка	45
Ф. С. Рябokonь—Об изменении формы и расположения алгебраической кривой в связи с изменением параметров, входящих в ее уравнение	54
М. П. Черняев—Геометрическое место центров конических сечений принадлежащих одному и тому же пучку	64
М. П. Черняев—Строфоида как инверсивное преобразование равнобочной гиперболы	66
М. И. Шайкевич—Алгебраические кривые и поверхности с постоянным произведением отрезков секущей	71
Г. А. Ключарев—Простое геометрическое построение лемнискаты Бернулли	74
Н. А. Иванов—В треугольнике равным биссектрисам соответствуют равные углы (распространение на геометрию Лобачевского)	75

МЕТОДИКА

Н. Б. Чернецкий—К методике преподавания рядов	78
---	----

БИБЛИОГРАФИЯ

Указатель литературы по математике	92
--	----

ЗАДАЧИ

Задачи	98
Решения задач	99
